Всероссийская олимпиада школьников по математике.

Муниципальный этап. 2023 – 2024 уч.год.

8 класс

Решение олимпиадных задач и критерии оценивания

Задача №1

Сколько всего есть четырехзначных чисел, которые делятся на 19 и оканчиваются на 19? Перечислите их. Ответ обоснуйте.

Решение:

Пусть $N = \overline{xy19}$ — такое число. Тогда N – 19 тоже кратно 19. Но $N - 19 = \overline{xy00} = \overline{xy} \cdot 100.$ Поскольку 100 и 19 взаимно просты, то двузначное число делится на 19. А таких всего пять: 19, 38, 57, 76 и 95. Легко убедиться, что все числа 1919, 3819, 5719, 7619 и 9519 нам подходят.

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Дан верный ответ. Перечислены все варианты. Представлено полное, логически верное обоснование.
6 – 5	Дан верный ответ. Перечислены все верные варианты. Идея решения понятна и верна, но недостаточно обоснования
4 - 3	Указана кратко идея решения, перечислены некоторые верные варианты, но не хватает подробного обоснования.
2	Дан верный ответ. Перечислены все варианты. Ответ подтверждается с помощью проверки.
1	Перечислены хотя бы 3 числа, без обоснования
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

Задача №2

Иван Иванович желает приобрести себе сувенир на память о путешествии, который стоит 2000 рублей. Достаточно ли у него денег на покупку, если у него имеется $400^5 - 399^2 \cdot (400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4)$?

Решение:

$$\text{Пусть } x = 400. \text{Выполним замену}$$

$$x^5 - (x-1)^2(x^3+2x^2+3x+4)$$
$$= x^5 - (x-1)(x^4+2x^3+3x^2+4x-x^3-2x^2-3x-4)$$
$$= x^5 - (x^5-x^4+x^4-x^3+x^3-x^2+x^2-x-4x+4) = 5x-4$$

Так как x= 400, 5x-4 = 2000-4…. Ответ: нет, денег недостаточно

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Ответ верный. Полное верное решение, выполненное рациональным способом.
6	Дан верный ответ. Решение выполнено стандартным способом, как пример по действиям.
5-4	Дан верный ответ. Решение выполнено стандартным способом, как пример по действиям, но присутствует вычислительная ошибка (одна), которая не повлияла на верный вывод
2–3	Дан верный ответ. Присутствуют попытки рационального вычисления, но решение не доведено до конца.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

Задача №3

Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 – q^5 = (p + q)^2$

Решение:

Пусть сначала ни одно из чисел p, q не делится на 3. Если остатки от деления p и q на 3 совпадают, то левая часть делится на 3, а правая – нет. Если эти остатки не совпадают, то правая часть делится на 3, а левая – нет. Пусть теперь p делится на 3, тогда p =3. Из равенства $p^3 - q^5 = (p+q)^2 > 0$ следует $p^3 > q^5$ и $q^5 < 27,$ что невозможно. Пусть, наконец, q делится на 3, тогда q =3 и $p^3 - 243 = (p+3)^2, p(p^2-p-6) = 252,$ откуда p - простой делитель 252, то есть 2,3 или 7. Проверка оставляет только p =7, $(p,q) = (7,3)$.

Ответ: p = 7, q=3

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Полное верное решение.
6 - 5	Решение содержит незначительные пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших дополнений.
4	Дан верный ответ. Присутствуют попытки обоснования, например, относительно левой и правой части и сравнения p и q. Но обоснований недостаточно.

3 - 2	Дан верный ответ при отсутствии решения, но верный ответ подтверждается выполненной проверкой.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

Задача №4

В $\triangle ABC$ провели биссектрису BL и оказалось, что $BC+CL = AB$. Зная, что $\angle ABC = 120\circ$. Найдите $\angle BAC$ (ответ дайте в градусах).

Решение.
Отметим на отрезке AB точку K так, чтобы BK = BC. Получим два равных треугольника BKL и BCL (по 2 сторонам и углу между ними). Так как $BC+CL = AB$, то $AK = LC = KL$. Получим равнобедренный треугольник AKL с равными углами при основании: A и L. $= \angle BKL$ – внешний угол треугольника AKL и равен сумме двух внутренних углов не смежных с ним. Значит, $\angle BCA = \angle BKL = 2\angle BAC$. Осталось найти искомый угол. В треугольнике BAC: 120^0 + BAC $+2\angle BAC = 180^0$. Отсюда следует, что $\angle BAC = 20^0$

Ответ: 20^0.

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Полное верное решение.
6	Дан неверный ответ, из – за вычислительные ошибки или описки, недочета. Идея решения понятна и верна.
5	Ответ верный. Решение содержит незначительные пробелы, неточности или некорректность в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших дополнений.
4-3	Задача не завершена, но есть верные выводы, свидетельствующие о продвижении в решении задачи: выполнено дополнительное построение, обосновано наличие равнобедренных треугольников.
2	Дан верный ответ. Решение очень краткое. Имеется набор действий без обоснования.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

Задача №5

Путешественник выходит из гостиницы в 3 часа дня и возвращается в 9 часов вечера по тому же маршруту. Известно, что по ровным участкам он идёт со скоростью 4 км/час, в гору - 3 км/час, под гору - 6 км/час. Найдите расстояние, которое прошёл путешественник, если он шёл без отдыха.

Решение:

Один км пути по ровной местности путешественник проходят за 1/4 часа. Поднимаясь в гору, он преодолевают один км за 1/3 часа, а спускаясь с горы, — за 1/6 часа. Следовательно, на то, чтобы пройти туда и обратно один км, независимо от того, пролегает ли его путь по долине или по склону горы, у нашего путешественника всегда уходит 1/2 часа. Таким образом, за 6 часов (с 3 до 9) он прошел 12 км в одну сторону и 12 км — в другую. Значит всего 24 км. Задачу можно решить и с помощью уравнения, обозначив, путь по ровной местности за x, а путь в гору за y. $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=6$ часов. Получим, что x+ y = 12 км. – это путь в одну сторону.

Ответ: 24 км

Баллы	*Критерии оценивания решения*
7	Полное верное решение.
6	Дан неверный ответ, из – за вычислительные ошибки или описки, недочета. Идея решения понятна и верна.
5 - 4	Ответ верный. Решение содержит незначительные пробелы, неточности или некорректность в обоснованиях, но в целом идея решения понятна.
3-2	Задача не завершена, но есть верные выводы, свидетельствующие о продвижении в решении задачи.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.