

8 класс

1. Маша расставила между последовательно записанными числами 1, 2, ..., 2023 знаки плюс и минус (между каждыми двумя соседними числами стоит один знак) так, что значение выражения получилось равным 2. Петя списывал пример у Маши, но перепутал все знаки (плюсы стали минусами, а минусы плюсами). Чему равно значение выражения у Пети? (Ответ объясните.)

Ответ: 0.

Решение. Если сложить оба выражения, то получится 2 (все слагаемые, кроме двух 1, сократятся). Значит значение выражения у Пети 0.

2. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду (и другу другу, и лгунишкам), а также лгунишки, которые говорят правду друг другу, но врут рыцарям. Однажды несколько аборигенов сели за стол, и каждый сказал своему правому соседу одну из двух фраз: “Ты лгунишка” или “Ты рыцарь”, причем вторая фраза была произнесена 10 раз. Затем каждый сказал своему соседу слева одну из тех же фраз, но при этом фраза “Ты лгунишка” была произнесена 30 раз. Сколько человек могло сидеть за столом?}

Ответ: 40.

Решение. Фразу “Ты рыцарь” мог сказать только рыцарь рыцарю, поэтому пар рыцарь-рыцарь в кругу ровно 10. Значит и во второй раз эта фраза была произнесена ровно 10 раз. Значит, второй раз всего было сказано 40 фраз, т.е. 40 человек за столом.

3. Дан квадрат $ABCD$. Точка K – середина стороны AB . На диагонали AC отметили точку F такую, что $AF : FC = 3 : 1$. Докажите, что $\angle KFD = 90^\circ$.

Решение. Опустим из точки F перпендикуляры FM на AB и FN на AD . Тогда $KM = MB = ND$ и $KF = FB = DF$, поэтому прямоугольные треугольники KMF и DNF равны. Следовательно, $\angle DFK = \angle NFM = 90^\circ$.

4. Найдите наименьшее натуральное число, у которого есть три разных собственных делителя, сумма которых равна 1001. (Собственный делитель числа — это его натуральный делитель, отличный от 1 и самого числа.)

Ответ: 924.

Решение. Три самых больших собственных делителя числа x не превосходят $\frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}$.

Тогда $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} \geq 1001$, откуда получаем, что $x \geq 924$. Число 924 подходит, так как $462 + 308 + 231 = 1001$.

5. В школе работают несколько кружков. В каждом кружке более одного человека, для каждых двух кружков есть человек, который посещает оба. Докажите, что можно выдать каждому ученику красный, синий или зелёный значок так, чтобы в каждом кружке оказались обладатели значков хотя бы двух цветов.

Решение. Выберем кружок K с наименьшим числом участников и раздадим его членам красные и синие значки (хотя бы по одному каждого цвета), а всем остальным – зелёные. Теперь в каждом кружке есть красный или синий значок. Если кружок не совпадает с K , то в нём есть ещё и зелёный значок. А если совпадает с K , то в нём есть и красный, и синий значок.