Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2023/24 уч.г.
Математика, 8 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

****Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям***

8.1. Мария Ивановна, проверяя первое задание контрольной работы, заметила, что десятичная дробь, записанная её учеником Васей в ответе, меньше верной на 21,33 и получена из неё переносом запятой на одну цифру. Какую десятичную дробь должен был записать Вася в ответе?
Ответ. 23,7.
Решение. Так как в результате ошибки число уменьшилось, то запятая была сдвинута влево. При этом число уменьшилось в 10 раз. Пусть получилось число x, тогда искомое число – это $10x$. По условию: $10x - x = 21{,}33$, значит, $x = 2{,}37$, откуда $10x = 23{,}7$.
Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное рассуждение, но допущена одна вычислительная ошибка – 6 баллов. Приведены верное уравнение и верный ответ, но не объяснено, почему запятая сдвинулась влево – 5 баллов. Приведен только верный ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.2. Докажите, что если положительные действительные числа x, y удовлетворяют равенству
$$x^2y^2 + x + y = xy + x^2 + y^2,$$
то хотя бы одно из них равно единице.
Решение. Преобразуем равносильным образом уравнение:
$$x^2y^2 + x + y = xy + x^2 + y^2 \iff x^2y^2 - x^2 + x - xy + y - y^2 = 0 \iff$$
$$\iff x^2(y^2-1) + x(1-y) + y(1-y) = 0 \iff (y-1)(x^2(y+1) - x - y) = 0 \iff$$
$$\iff (y-1)(x^2y - y + x^2 - x) = 0 \iff (y-1)\big(y(x^2-1) + x(x-1)\big) = 0 \iff$$
$$\iff (y-1)(x-1)(y(x+1)+x) = 0.$$
Выражение в последней скобке положительно, так как положительны числа x и y, поэтому данное уравнение равносильно условию $(y-1)(x-1) = 0$, которое выполняется тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел x, y равно 1.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Следующие критерии суммируются. Получено последнее уравнение – 5 баллов; из этого доказано, что хотя бы одно из чисел равно единице – 2 балла. Если решение не доведено до конца, за продвижения в преобразовании уравнения – 1-2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.3. В каждом поле таблицы 7×7 записано число -1, 0 или $+1$ так, что сумма чисел в любой строке неположительна, а сумма чисел в любом столбце неотрицательна. Какое наименьшее количество нулей может быть записано в клетках таблицы?

Ответ. 7.

Решение. Посчитаем сумму чисел в таблице двумя способами. Складывая суммы строк, получаем, что она неположительна, а складывая суммы столбцов – что она неотрицательна. Значит, сумма в таблице равна 0, и это достигается, только если в каждом ряду (строке или столбце) сумма равна 0. Следовательно, в каждом ряду поровну чисел $+1$ и -1. Но тогда число ненулевых клеток в каждой строк чётно, значит, в каждой строке есть хотя бы один 0. Тем самым в таблице есть хотя бы семь нулей. Пример с 7 нулями приведён на рисунке.

0	1	1	-1	1	-1	-1
-1	0	-1	1	-1	1	1
1	-1	0	1	1	-1	-1
-1	1	-1	0	-1	1	1
1	-1	1	-1	0	1	-1
-1	1	-1	1	-1	0	1
1	-1	1	-1	1	-1	0

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано, что сумма в таблице равна нулю – 3 балла. Доказано, что в каждой строке есть хотя бы один ноль – 2 балла. Приведён пример с 7 нулями – 2 балла. Баллы суммируются. Приведен только верный ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH. Оказалось, что $AB + BH = HC$. Докажите, что $\angle ABC$ в два раза больше $\angle ACB$.

Решение. Отметим точку M на продолжении стороны BC за точку B так, что $AB = BM$. Тогда в равнобедренном треугольнике ABM внешний угол при вершине B равен сумме двух равных углов при основании AM, поэтому $\angle ABC = 2\angle AMB$. Также равнобедренным является треугольник AMC, поскольку отрезок AH является его высотой и медианой одновременно ($HC = AB + BH = BM + BH = MH$). Тогда $= \angle AMB = \angle ACB$ – его углы при основании. Итак, $\angle ABC = 2\angle AMB = 2\angle ACB$, что и требовалось доказать.

Замечание. *Аналогичное решение получается, если отметить на отрезке HC точку N такую, что $BH = HN$.*

Комментарий. *Любое полное решение задачи – 7 баллов. Доказано, что треугольники ABM и AMC равнобедренные, но дальнейших продвижений нет – 5 баллов. Построена точка M, либо точка N (аналогичная по построению), есть дальнейшие продвижения, но они не приводят к правильному ответу – 2 балла.*

8.5. Шесть эльфов и шесть гномов встали в круг, чередуясь. Каждый из них написал себе в записную книжку ненулевое действительное число. Оказалось, что каждое число, написанное эльфом, равно сумме чисел, написанных рядом стоящими гномами, а каждое число, написанное гномом, равно произведению чисел, написанных рядом стоящими эльфами. Найдите сумму всех чисел, записанных эльфами и гномами.

Ответ. 4,5.

Решение. Выберем произвольных пятерых жителей, стоящих по кругу подряд, крайние из которых – эльфы. Пусть их числа равны x, xy, y, yz, z. Тогда $y = xy + yz$. Так как $y \neq 0$, на него можно сократить, получив $x + z = 1$. Таким образом, сумма любых двух чисел, записанных эльфами, стоящими через троих, равна 1. Пусть эльфы записали числа $x_1, x_2, \ldots, x_6$ (в этом порядке по кругу). Тогда

$$1 = x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = \cdots = x_5 + x_1 = x_6 + x_2.$$

Можно заметить, что

$$6 = (x_1 + x_3) + (x_2 + x_4) + \cdots + (x_5 + x_1) + (x_6 + x_2) = 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_6),$$

откуда сумма всех чисел эльфов равна 3.

С другой стороны, сумма чисел эльфов в два раза больше суммы чисел всех гномов, ведь число каждого гнома является слагаемым для двух эльфов. Значит, сумма чисел гномов равна 1,5. Общая сумма тогда равна 4,5. Осталось заметить, что такая ситуация действительно возможна: все эльфы могут написать число $\frac{1}{2}$, а все гномы – $\frac{1}{4}$.

Комментарий. *Любое полное решение – 7 баллов. Доказано, что сумма может быть равна только 4,5, но не приведен пример допустимой расстановки чисел – 7 баллов. Доказано, что сумма чисел эльфов, стоящих «через 3», равна 1 – 3 балла. Найдена сумма всех чисел эльфов – 2 балла. Указано, что сумма чисел гномов в два раза меньше суммы чисел эльфов – 1 балл. Получен верный ответ – 1 балл. Баллы суммируются. Верный пример расстановки чисел без решения – 1 балл. Только верный ответ – 0 баллов.*