8-й класс

1. Доказать, что при $n \in N$ число $A = n^4 + 2n^2 + 9$ является составным.

Доказательство:

$A = n^4 + 2n^2 + 9 = n^4 + 6n^2 + 9 - 4n^2 = (n^2 + 3)^2 - (2n)^2 =$

$= (n^2 - 2n + 3)(n^2 + 2n + 3).$

Итак, число A представлено как произведение двух натуральных чисел. Покажем, что они отличны от 1

при $n = 1$

$n^2 - 2n + 3 = 2 \neq 1$

$n^2 + 2n + 3 = 6 \neq 1;$

при $n \geq 2 \Rightarrow n^2 - 2n \geq 0 \Rightarrow n^2 - 2n + 3 \geq 3 \Rightarrow n^2 - 2n + 3 \neq 1$

$n^2 + 2n + 3 > n^2 - 2n + 3 \Rightarrow n^2 + 2n + 3 \neq 1.$

Следовательно, при любом n число A составное.

2. Найдите все целые значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 6x + ay = 10 \end{cases}$$

имеет решение. Укажите наибольшее из возможных значений a.

Решение:

$2x = 8 - 5y; \quad x = 4 - 2{,}5y$

$6(4 - 2{,}5y) + ay = 10$

$24 - 15y + ay = 10$

$y(a - 15) = 10 - 24$

$y = \frac{-14}{a-15}$, a–15 делитель –14

–14 имеет следующие делители: ±1; ±2; ±7; ±14

$a - 15 = -1 \quad a = 14$

$a - 15 = 1 \quad a = 16$

$a - 15 = 2 \quad a = 17$

$a - 15 = -2 \quad a = 13$

$a - 15 = 7 \quad a = 22$

$a - 15 = -7 \quad a = 8$

$a - 15 = 14 \quad a = 29$

$a - 15 = -14 \quad a = 1.$

Ответ: 29.

3. В деревне Сахаровка $\frac{2}{5}$ всех мужчин женаты и $\frac{2}{7}$ всех женщин замужем. Какая доля населения деревни состоит в браке?

Решение:

Пусть М – число мужчин, Ж – женщин. Число семей по мужьям равно $\frac{2}{5}$М, по женам $\frac{2}{7}$Ж. Их равное количество.

$\frac{2}{5}М = \frac{2}{7}Ж \quad \Longrightarrow \quad Ж = \frac{2}{5}М \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{5}М.$

Общее число людей в браке равно:

$\frac{2}{5}М + \frac{2}{7}Ж = \frac{2}{5}М + \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{5}М = \frac{4}{5}М$

Общее число людей равно:

$М + Ж = М + \frac{7}{5}М = \frac{12}{5}М$

Доля населения в браке равно:

$\frac{\frac{4}{5}М}{\frac{12}{5}М} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ или $\frac{\frac{4}{7}Ж}{\frac{12}{7}Ж} = \frac{1}{3}$.

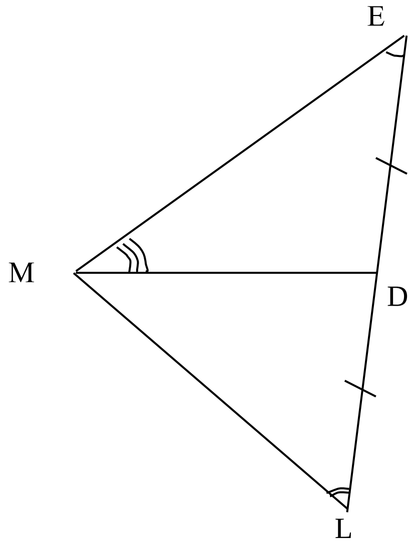
Ответ: $\frac{1}{3}$.

4. Сто монет разложены в 10 стопок, по 10 монет в каждой. В одной из стопок все монеты фальшивые. Масса каждой нормальной монеты 5 г, а фальшивой – на 0,5 г меньше. Как при помощи одного взвешивания на весах с разновесами определить, в какой стопке находятся фальшивые монеты?

Решение:

Пронумеруем все стопки в порядке возрастания от 1 до 10. Из каждой стопки возьмем количество монет, соответствует номеру стопки. Выбрано 55 монет. Вес всех монет должен быть $55 \cdot 5 = 275$ гр., а будет $275 - n \cdot 0{,}5$, где n – номер стопки. Взвесим 55 монет и найдем разность между их настоящим весом и 275 гр. Далее определим номер стопки, который соответствуют количеству монет, взятых из нее.

5. В треугольнике MEL провели медиану MD. Оказалось, что
$\angle EMD = \angle E + \angle L$, $MD = 4$ см. Найти ML.



Решение:
Удвоим медиану MD за точку D.
Получим $MM' = 2MD$, $MD = DM'$
$MEM'L$ – параллелограмм
(т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам).
$\angle M'EL = \angle MLE \Rightarrow \angle M'ME = MEM' \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta MEM'$ – равнобедренный
$EM' = MM' \Rightarrow EM' = 8$ см $\Rightarrow$
$ML = 8$ см.
Ответ: 8 см.