Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2023-2024 уч.год

8 класс

Решения и ответы

1. В ряд выложены черные и белые шашки, так, что они чередуются через одну. Известно, что из них белых шашек ровно 52%. Сколько черных шашек выложено в ряд?

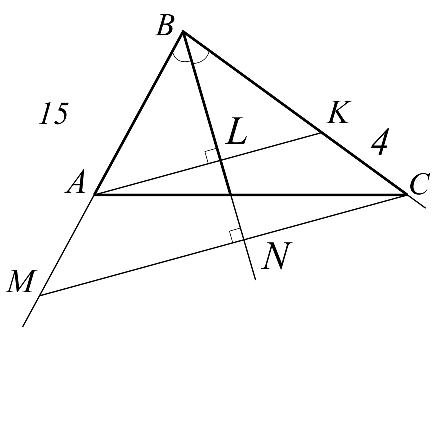
   Решение. Из условия мы понимаем, что белых и черных шашек неравное количество. Так как шашки выкладывались через одну, то черных должно быть на одну меньше. Пусть черных шашек x, тогда белых шашек $x+1$. Значит, всего шашек $2x+1$. Составим пропорцию по условию задачи:
$$\frac{x+1}{2x+1} = \frac{52}{100}$$
   Находим решение
$$100x + 100 = 104x + 52$$
$$4x = 48$$
$$x = 12$$
   Получили, что черных шашек 12.

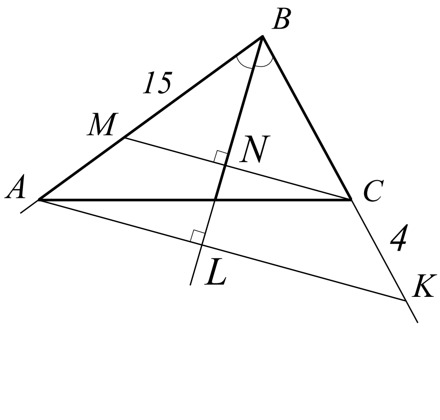
   Ответ. Выложили 12 черных шашек.

2. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC, пересекающие лучи BC и BA в точках K и M соответственно. Какие значения может принимать длина стороны AB, если $BM = 15$ и $CK = 4$?

   Решение. Особенность этой задачи в том, что существует два возможных рисунка, удовлетворяющих условию задачи. В зависимости от того, какая из сторон, AB или BC, больше, точки пересечения заданных прямых с лучами BC и AB лежат на сторонах треугольника или на их продолжениях. Взаимное расположение точек показано на рисунках.

   Обозначим точки пересечения биссектрисы угла ABC с прямыми AK и MC L и N соответственно. Заметим, что в треугольнике MBC BN – это высота и биссектриса, значит, он - равнобедренный и $BC = BM = 15$. Тогда в первом случае (рисунок слева) $BK = BC - KC = 15 - 4 = 11$. В треугольнике ABK BL – это высота и биссектриса, значит, он равнобедренный, и $AB = BK = 11$. Во втором случае (рисунок справа) $BK = BC + KC = 15 + 4 = 19$. В треугольнике ABK BL – это высота и биссектриса, значит, он равнобедренный, и $AB = BK = 19$. Ответ: $AB = 11$ или $AB = 19$.





3. Про неотрицательные числа a, b и c известно, что

$$a^3 = 3b^2 + 3b + 4 \quad b^3 = 3c^2 + 3c + 4 \quad c^3 = 3a^2 + 3a + 4$$

Чему равно произведение $(a-1)(b-1)(c-1)$?

Решение. В исходных уравнениях перенесем единицу в левую часть и разложим слева разность кубов

$$(a-1)(a^2+a+1) = 3(b^2+b+1)$$
$$(b-1)(b^2+b+1) = 3(c^2+c+1)$$
$$(c-1)(c^2+c+1) = 3(a^2+a+1)$$

Перемножим эти уравнения. Заметим, что это равносильный переход, так как правые части уравнений не могут равняться нулю.

$$(a-1)(a^2+a+1)(b-1)(b^2+b+1)(c-1)(c^2+c+1) = 3(b^2+b+1)3(c^2+c+1)3(a^2+a+1)$$

Отсюда находим искомое выражение

$$(a-1)(b-1)(c-1) = 27.$$

Ответ. 27

4. Петя взял шесть последовательных целых чисел и расставил их в каком-то порядке по кругу. Затем он попросил Васю посчитать все суммы соседних чисел. Могло ли у Васи получиться в результате 6 последовательных чисел в каком-то порядке?

Решение. Пусть у Пети изначально были числа: x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$. $x+5$. Пусть у Васи получились числа y, $y+1$, $y+2$, $y+3$, $y+4$. $y+5$. Вычислим сумму чисел Пети:

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 = 6x + 15$$

Сумма всех чисел Васи:

$$y + y + 1 + y + 2 + y + 3 + y + 4 + y + 5 = 6y + 15$$

Сумма чисел Васи должна быть в 2 раза больше суммы чисел Пети, так как каждое число Пети в эту сумму входит ровно 2 раза.

$$2(6x + 15) = 6y + 15$$

$$12x + 30 = 6y + 15$$

Это уравнение не имеет решений в целых числах, так как в левой части стоит четное число, а в правой нечетное. Поэтому у Васи не могло получиться ни в каком порядке 6 последовательных чисел.

Покажем, что сумма чисел Васи должна быть в 2 раза больше суммы чисел Пети. (*В работе это утверждение можно не доказывать).*

Пусть Петя расставил числа a, b, c, d, e, f.
Тогда Вася складывает суммы $(a+b), (b+c), (c+d), (d+e), (e+f), (f+a)$.
Сумма этих сумм равна $2(a+b+c+d+e+f)$.

Ответ. Шесть последовательных чисел получиться не могло.

5. Пусть $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Докажите, что

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \leq 6.$$

Решение. Рассмотрим попарные квадраты разностей данных чисел a, b, c и d:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-c)^2 = a^2 - 2ac + c^2$$
$$(a-d)^2 = a^2 - 2ad + d^2$$
$$(b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$$
$$(b-d)^2 = b^2 - 2bd + d^2$$
$$(c-d)^2 = c^2 - 2cd + d^2$$

Сложим все шесть уравнений:

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 =$$
$$= 3a^2+3b^2+3c^2+3d^2-2ab-2ac-2ad-2bc-2bd-2cd.$$

Так как сумма квадратов не может быть отрицательной, получаем:

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \geq 0;$$

$$12-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \geq 0;$$
$$6 \geq (ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

Что и требовалось доказать.