Решения муниципального этапа ВсОШ по математике

8 класс

1. Пять собачек Рекс, Дик, Шарик, Ной и Принц участвовали в соревнованиях: бег, ориентирование на местности, поиск спрятанного предмета. У собачек были ошейники какого-то одного из цветов: оранжевый, бирюзовый и фиолетовый. Во всех трех соревнованиях на первом месте была собака с оранжевым ошейником, на втором с бирюзовым и на третьем с фиолетовым. На последнем месте в беге был Рекс, в ориентировании Шарик, а искал спрятанный предмет хуже всех Принц. Могли ли у Дика и Ноя быть ошейники одинакового цвета? Во время соревнований ошейники у собачек не менялись.

Решение. Собачек всего пять, цветов ошейников – три, значит у одной собачки будет ошейник отличного от всех цвета. Это не Рекс, не Шарик и не Принц, значит это либо Дик, либо Ной, а значит у них не может быть ошейников одинаковых цветов.

Ответ. Нет.

2. Два кубика изготовлены из разных материалов. Плотность материала первого кубика в 5 раз меньше, чем плотность материала второго кубика, а сторона первого кубика на 80% больше чем сторона второго. Во сколько раз масса первого кубика больше массы второго?

Решение. Объем второго кубика – x^3, первого – $(1{,}8x)^3$. Тогда масса первого кубика будет $\rho(1{,}8x)^3 = 5{,}832\rho x^3$, а второго $5\rho x^3$.

Ответ. В 1,1664 раза.

3. Решите уравнение $\overline{aabb} = \overline{aa}^2 + \overline{bb}^2$. В ответ запишите пару цифр (a, b). Запись $\overline{abcd}$ соответствует четырёхзначному натуральному числу из цифр a, b, c, d. Аналогично для двухзначных чисел. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – различные цифры.

Решение. Имеем: $\overline{aabb} = 1100a + 11b$. По условию

$$1100a + 11b = (11a)^2 + (11b)^2,$$

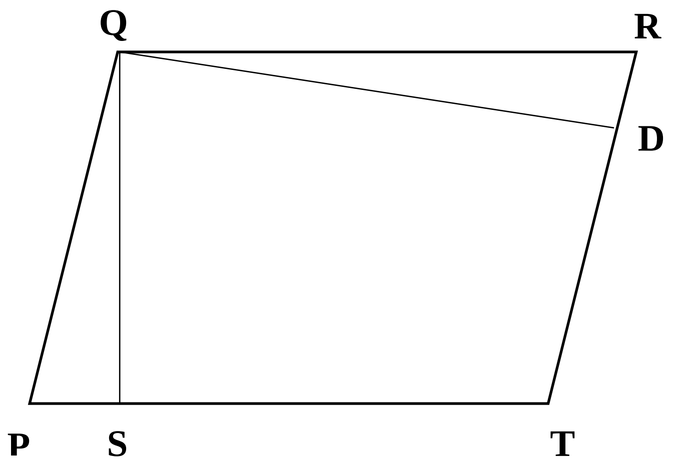
или $99a + (a + b) = 11(a^2 + b^2)$.

Следовательно, $a + b$ кратно 11. Так как $1 \le a \le 9; 1 \le b \le 9$, то $a + b = 11$, тогда $99a + 11 = 11(a^2 + (11 - a)^2)$, $9a + 1 = a^2 + (11 - a)^2$, $2a^2 - 31a + 120 = 0$, значит, $a = 8, b = 11 - 8 = 3$.

Проверка $8833 = 88^2 + 33^2$.

Ответ. (8, 3).

4. Дан параллелограмм *PQRT*. *PQ* = *16*, *QR* = *24*, точки *S* и *D* лежат на сторонах *PT* *и RT*, причем $QS \perp PT$, $QD \perp RT$, $\angle SQD = 60°$. Найдите длину *QS*.



Решение. По условию в параллелограмме $PQRT$: $QD \perp RT$ $(QD \perp QP)$ и $\angle SQD = 60°$, тогда $\angle PQS = 30°$. Значит, $PS = \frac{1}{2}PQ = 8$.

Из ΔPSQ, где $PQ = 16$ м, $PS = 8$ м, $QS^2 = PQ^2 - PS^2$, или $QS = \sqrt{(16-8)(16+8)} = \sqrt{8 \cdot 8 \cdot 3} = 8\sqrt{3}$.

Ответ. $8\sqrt{3}$.

5. Докажите, что при $m > 0, n > 0$ и $m^2n^2 = m + n$ выполняется равенство
$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{m^3 + m^2 + 1}{n^3 + n^2 + 1}.$$

Доказательство. При $m = n$ получим тождество. Пусть $m \neq n$. Так как $m^2n^2 = m + n$, то $m^2n^2(m-n) = (m+n)(m-n)$, или

$$m^3n^2 - m^2n^3 = m^2 - n^2. \qquad (1)$$

Прибавим к обеим частям (1) $m^2n^2 \neq 0$:

$$m^3n^2 - m^2n^3 + m^2n^2 = m^2 - n^2 + m^2n^2,$$

$$m^3n^2 + m^2n^2 + n^2 = m^2n^3 + m^2n^2 + m^2$$

или $m^2(n^3 + n^2 + 1) = n^2(m^3 + m^2 + 1)$ откуда $\frac{m^2}{n^2} = \frac{m^3+m^2+1}{n^3+n^2+1}$. Что и требовалось доказать.