8 класс

$\boxed{1}$ *Можно ли в клетках квадрата 100×100 разместить по целому числу так, чтобы сумма чисел во всем квадрате 100×100 была положительной, а сумма чисел в любом квадрате 51×51 – отрицательной?*

Решение. Например, поставим в каждой клетке число 1, кроме клетки X в 50 строке и 51 столбце. В эту клетку X поставим число -3456. Поскольку клетка X находится в составе квадрата 51×51, где бы он ни был расположен, сумма чисел в любом квадрате 51×51 равна $-3456 + 2600 = -856 < 0$, а сумма во всем квадрате 100×100 равна $9999 - 3456 = 6543 > 0$ и условие выполняется.

$\boxed{2}$ *Из натуральных чисел x, y и z число x – меньше остальных, а z – больше остальных. Известно, что $y+x$ делится нацело на $y-x$, а $z+y$ делится нацело на $z-y$. Сколько цифр может быть в числе z, если x записывается 2023 цифрами, а y записывается 2024 цифрами?*

Решение. По условию $2x = (y + x) - (y - x)$ кратно $y - x$, значит $2x \geqslant y - x$ и $y \leqslant 3x$. Точно так же $z \leqslant 3y$. Поэтому $z \leqslant 3y \leqslant 9x$. Так как z самое большое, то в нем не менее 2024 цифр. Если бы число z имело 2025 или более цифр, то оно было бы больше x более чем в 10 раз. Противоречие. Поэтому в числе z ровно 2024 цифр.

$\boxed{3}$ *Дан параллелограмм $ABCD$ и K – середина стороны BC. Точка H – основание перпендикуляра, проведенного из вершины A к прямой DK. Докажите, что треугольник BAH – равнобедренный.*

Решение. Продлим DK до пересечения с прямой AB и пусть M – точка пересечения. Треугольники DCK и MBK равны по стороне и двум прилежащим к ним углам. Из равенства треугольников следует, что $CD = BM$. Но $CD = AB$, поэтому $AB = BM$ и B – середина отрезка AM. Поэтому HB – медиана треугольника HAM. Но треугольник HAM – прямоугольный с прямым углом H. Поэтому $HB = \dfrac{1}{2}AM = AB$.

$\boxed{4}$ *Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди, начинает Петя. На столе лежат монеты: однорублевые и двухрублевые. За один ход игрок должен взять сколько-то монет, но на сумму не более трех рублей. Выигрывает тот, кто забрал последнюю монету. Кто может обеспечить себе выигрыш, если: а) в начале на столе 11 рублевых и 11 двухрублевых монет; б) в начале на столе 12 рублевых и 12 двухрублевых монет?*

Решение. Пока на столе есть монеты в 1 рубль, можно либо завершить игру, либо взять любую сумму от 1 до 3 рублей. Этим можно сделать сумму на столе кратной 4, если она не была кратна 4 перед ходом (назовем того, кто может так сделать *Виктором*). В частности, после такого хода на столе четное число рублевых монет. Поэтому если перед ходом Виктора не осталось рублевых монет, то соперник взял два рубля и можно в ответ взять двухрублевую монету. После этого Виктор в ответ на взятие двухрублевки соперником имеет возможность взять двухрублевку.

а) Петя берет 1 рублевую монету и становится Виктором;

б) Вася является Виктором (сумма на столе равна 36 рублям).

$\boxed{5}$ *Дан клетчатый квадрат 8×8, в каждой клетке которого сидят по два жука. По сигналу каждый жук переползает в соседнюю по стороне клетку. При этом жуки, сидевшие до сигнала в одной клетке, должны оказаться в разных клетках. Какое наибольшее количество клеток может в результате остаться совсем без жуков?*

Решение. Покажем сначала, что свободными будут не более 24 клеток. Рассмотрим жуков, которые сидели до сигнала в черных клетках на левом рисунке. Клеток этих 20, и они расположены так, что два жука из разных черных клеток не могут после сигнала оказаться в одной клетке. Поэтому не менее 40 клеток после сигнала будут содержать жуков.

С другой стороны, если все жуки перейдут на одну из крашеных клеток на правом рисунке (можно проверить, что это можно сделать по правилам, так как каждая клетка граничит ровно с двумя закрашенными), то свободными останутся ровно 24 клетки.

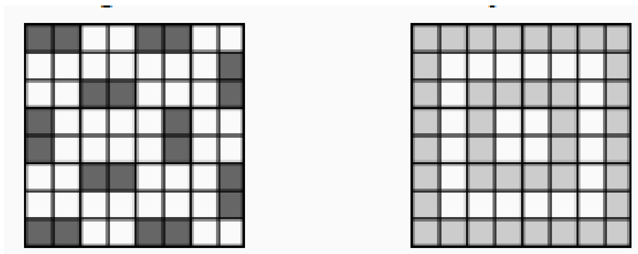

Рис. 2: К задаче 5 для 8 класса