ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2023-2024 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский.

8 класс

8.1. В кружке занимаются 19 школьников. На праздник 8 Марта каждый из мальчиков послал открытки девочкам из кружка (каждый – хотя бы одну). Оказалось, что каждая девочка получила ровно одну открытку, а любые два мальчика послали разное число открыток. Какое наибольшее число мальчиков могло быть в кружке?

Ответ. 4.

Решение. Если мальчиков в кружке хотя бы 5, то они суммарно послали не меньше 1+2+3+4+5=15 открыток (так как любые два мальчика послали разное число открыток, и каждый – хотя бы одну). Значит, девочек кружке не меньше 15 (так как каждая девочка получила одну открытку). То есть всего в кружке не меньше 20 школьников. Получили противоречие. Значит, мальчиков не больше 4. В кружке может быть ровно 4 мальчика и 15 девочек. Мальчики могут послать 1, 2, 3 и 9 открыток.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что мальчиков не больше 4 – 4 балла.

Приведен пример рассылки открыток для 4 мальчиков – 3 балла.

8.2. В кошельке лежит 100 рублей монетами по 1, 2 и 5 рублей. Каждый из 21 человека подходил к кошельку и клал или брал ровно одну монету этих достоинств. В итоге в кошельке оказалось ровно 120 рублей монетами по 1, 2 и 5 рублей. Верно ли, что кто-то либо взял, либо положил монету достоинством 2 рубля?

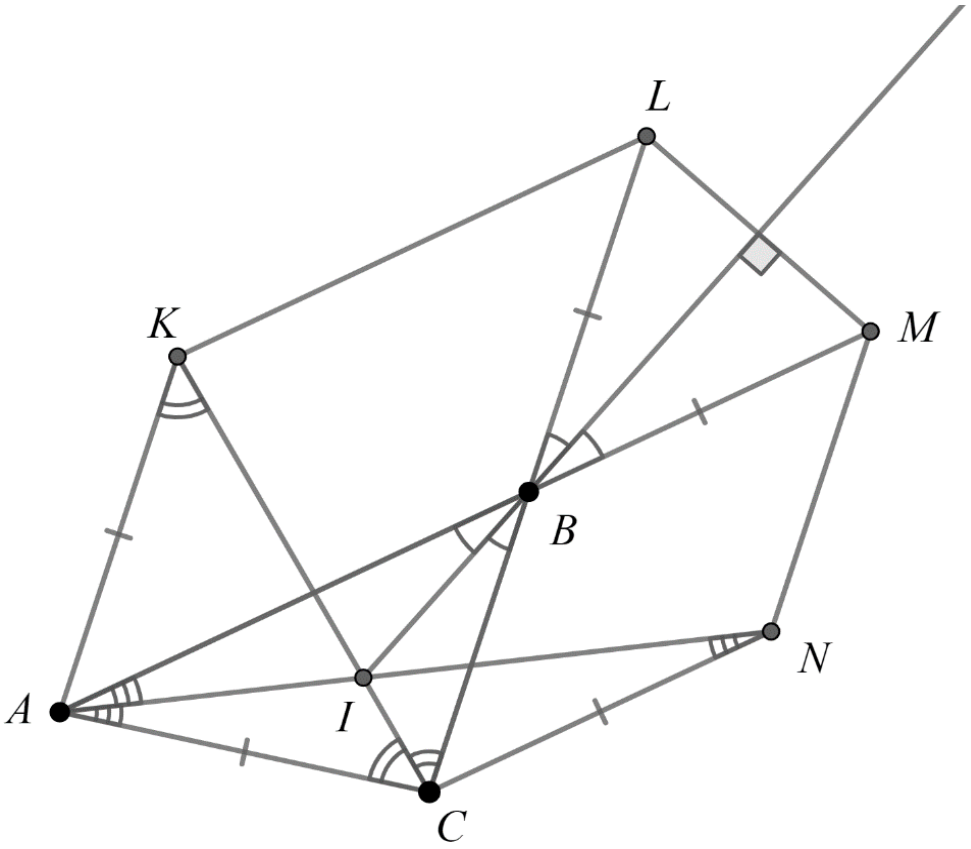
Ответ. Верно.

Решение. Предположим, что это не верно. Тогда каждый либо брал, либо клал монету достоинством 1 или 5 рублей. Заметим, что числа 1 и 5 – нечетные. Поэтому каждый раз сумма в кошельке менялась на нечетное число. Поскольку в начале в кошельке лежит 100 рублей – четное число, то после 21 операции в кошельке будет лежать нечетное число рублей. Но 120 – четное число. Полученное противоречие завершает доказательство.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

8.3. Точка I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. На продолжении AI за точку I и на продолжении AB за точку B выбраны соответственно точки N и M так, что $BCNM$ – параллелограмм. Аналогично на продолжении CI за точку I и на продолжении CB за точку B выбраны соответственно точки K и L так, что $BAKL$ – параллелограмм. Докажите, что прямые BI и LM перпендикулярны.



Решение. Центр вписанной в треугольник окружности находится на пересечении его биссектрис. Значит, углы BAN и CAN равны. В силу параллельности прямых CN и AB равны углы BAN и ANC. Значит, треугольник ACN – равнобедренный, и в нем $AC = CN$, откуда $BM = AC$. Аналогично $BL = AC$. Значит, $BM = BL$. Но углы LBM и ABC – вертикальные. Поэтому прямая BI будет также биссектрисой в равнобедренном треугольнике LBM. И, значит, его высотой.

Комментарий.

Обосновано равенство одной или нескольких пар отрезков ($AC = CN$ ($BM = AC$) и/или $AC = AK$ ($BL = AC$)) – 2 балла.

Доказано, что $BM = BL$ – еще 2 балла.

8.4. Какие значения может принимать произведение ab, если известно, что выполняются равенства $a^2 - b^2 = a^3 + b^3$ и $a^3 - b^3 = a^4 + b^4$?

Ответ. 0; –1.

Решение. Перемножим данные равенства крест-накрест. Получим: $(a^2 - b^2)(a^4 + b^4) = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$. Следовательно, $b^2a^4 - a^2b^4 = a^2b^2(a^2 - b^2) = 0$.
Возможны два случая.
1. $a^2b^2 = 0$. Этот случай возможен, например, при $a = b = 0$. Тогда $ab = 0$.
2. $a^2 - b^2 = 0$. Тогда $a^3 + b^3 = 0$, откуда $b = -a$. Подставив это равенство во второе уравнение, получаем: $-2b^3 = 2b^4$. Если $b = 0$, то $ab = 0$. Если же $b \neq 0$, то $b = -1$. Откуда $a = 1$ и $ab = -1$.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Один ответ получен рассмотрением примера – 0 баллов.

Оба ответа получены рассмотрением примеров – 2 балла.

Верно разобран только один случай – 3 балла.

Замечание. Первый случай реализуется и для других пар a, b: $a = 0,\ b = -1$ и $a = 1,\ b = 0$.

8.5. На столе лежат 100 карточек с числами от 1 до 100. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход можно взять со стола любую карточку. Игра заканчивается, когда на столе останется две карточки. Второй выигрывает, если числа на оставшихся карточках отличаются ровно на 10. Иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Второй.

Решение. Опишем стратегию второго игрока. Пусть он разобьет карточки на пары следующим образом: 1-11, 2-12, 3-13, …, 10-20, 21-31, 22-32, …, 89-99, 90-100. Тогда в каждой паре числа отличаются ровно на 10. Каждым ходом второму игроку следует брать карточку из той пары, из которой только что взял карточку первый игрок. Поэтому после каждого хода второго игрока количество пар будет уменьшаться на одну. В конце игры на столе останется одна пара карточек. Числа в ней отличаются на 10. Поэтому второй игрок выиграет.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.