8 класс

1. Число $A = 3x^2 + 14$ составляет столько же процентов от числа x^2, сколько процентов число $B = 3x + 7$ составляет от числа x. Найдите A и указанный процент.

Ответ: A = 26; 650 %.

Решение.

$$\frac{3x^2 + 14}{x^2} = \frac{3x + 7}{x}$$

$$3 + \frac{14}{x^2} = 3 + \frac{7}{x}$$

$$\frac{14}{x^2} = \frac{7}{x}$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 2$$

$A = 3 \cdot 2^2 + 14 = 26$

$\frac{3x + 7}{x} \cdot 100\% = 650\%$

2. Три девочки и три мальчика в течение года решали одни и те же задачи. Катя решила $\frac{3}{4}$ всех задач и ещё $\frac{1}{4}$ от того, что решил Петя. Лена решила $\frac{1}{2}$ всех задач и ещё $\frac{1}{10}$ от того, что решил Вася. Маша решила $\frac{3}{5}$ всех задач и ещё $\frac{1}{7}$ от того, что решил Федя. Какая из девочек решила больше всех задач (среди девочек)?

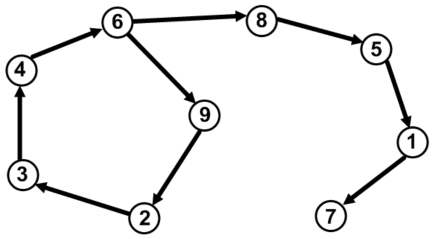
Ответ: Среди девочек больше всех решила Катя.

Решение. $\frac{1}{10}$ от того, что решил Вася, составляет не больше, чем $\frac{1}{10}$ от общего числа задач. Поэтому Лена решила не больше, чем $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$ всех задач. Аналогично, Маша решила не больше, чем $\frac{3}{5} + \frac{1}{7} = \frac{26}{35}$ всех задач. Катя решила не меньше $\frac{3}{4}$ всех задач. Поскольку $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$ и $\frac{3}{4} > \frac{26}{35}$, то получаем, что больше всех решила Катя.

3. Написано 2023-значное число. Каждое двузначное число, образованное соседними цифрами этого числа, идущими слева направо, делится на 23 или 17. Последняя цифра данного числа — 7. Какая цифра первая?

Ответ: 2.

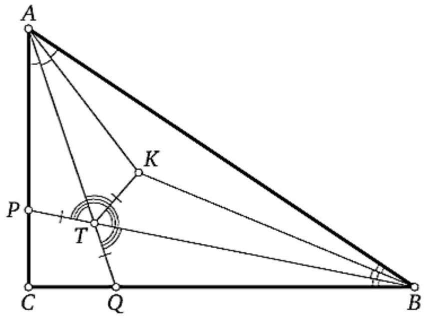
Решение. Двузначные числа, которые делятся на 23: 23, 46, 69, 92. Двузначные числа, которые делятся на 17: 17, 34, 51, 68, 85. Нарисуем граф, в котором вершинами будут цифры. Соединим их стрелками, если они составляют число, которое делится на 23 или 17.



Так как в числе 2023 цифры и последняя цифра 7, то до этого обязательно стояли цифры 1, 5, 8, 6, а потом цифры в обратном порядке: 6-4-3-2-9-6-4- …, при этом в цикле 5 цифр. На них остается 2023 – 4 = 2019 цифр, то есть 403 полных цикла и еще 4 цифры. Значит первая цифра 2023-значного числа — 2.

4. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AC и BC взяты точки P и Q соответственно так, что $\angle PBC = \frac{1}{3}\angle ABC$ и $\angle QAC = \frac{1}{3}\angle BAC$. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке T. Докажите, что $TP = TQ$.

Решение. Соединим точку пересечения K биссектрис треугольника ABT с его вершинами.



В результате угол CAB разбился на три равных. Поскольку

$$\angle ATB = 180° - \frac{2}{3}(\angle CAB + \angle CBA) = 180° - \frac{2}{3} \cdot 90° = 120°,$$

получаем, что $\angle ATP = 60°$ (как смежный с $\angle ATB$) и $\angle ATK = \frac{1}{2}\angle ATB = 60°$. Значит, треугольники ATP и ATK равны по стороне и двум прилежащим углам, а тогда $TP = TK$. Аналогично $TQ = TK$. Следовательно $TP = TQ$.

5. Вася выписал на доску набор различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 2023. Оказалось, что для любых двух написанных a и b число $a + b$ не делится нацело на число $a - b$. Какое наибольшее количество чисел мог выписать Вася?

Ответ: 675.

Решение. Докажем, что ответ равен $\frac{2023-1}{3} + 1 = 675$.

Оценка. Докажем, что больше 675 чисел Вася написать не мог. Для этого рассмотрим три любых подряд идущих числа a, $b = a + 1$ и $c = a + 2$. Заметим, что соседние числа выписаны быть не могут (иначе их разница равна единице, а любое число делится на 1). Поэтому максимум могли быть выписаны только a и c. Но если они выписаны, то их сумма равна $a + (a + 2) = 2(a + 1)$, что делится на разность $(a + 2) - a = 2$. Подводя итог, из любых трёх последовательных чисел может быть выписано максимум одно. Но тогда на доске может быть максимум одно число из 1, 2 и 3; максимум одно из 4, 5 и 6; …; максимум одно из 2020, 2021 и 2022. То есть, из первых 2022 чисел может быть выписано максимум 674 числа плюс число 2023, итого 675.

Пример. Приведём пример набора из 675 чисел. Пусть Вася выписал все числа вида $3n + 1$ для n от 0 до 674, то есть, 1, 4, 7, . . . , 2020, 2023. Заметим, что сумма двух таких чисел имеет вид $(3n + 1) + (3m + 1) = 3(n + m) + 2$, что не делится на 3, а разность равна $(3n + 1) - (3m + 1) = 3(n - m)$, что кратно трём. Но число, не делящееся на 3, не может делиться на число, которое на 3 делится. Поэтому условия задачи выполнены, и этот набор из 675 чисел подходит.