Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный тур

2023 - 2024 учебный год

8 класс

Ответы и решения.

Максимальное количество баллов: 35 .

Общие критерии оценивания каждой задачи:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача №1

В вершинах куба записаны числа 2; 0; 0; 3; 1; 9; 5; 7.

За один ход разрешается прибавить к числам, стоящим на концах ребра, одно и то же целое число.

Можно ли за несколько ходов получить нули во всех вершинах?

Ответ: Получить нули во всех вершинах нельзя.

Решение.

Сумма всех чисел первоначально была равна 27 (2 +0 +0 + 3 +1 +9 +5 +7 = 27).

При прибавлении двух одинаковых чисел чётность суммы не изменится. А так как сумма шести нулей равна нулю – число чётное, то получить нули во всех вершинах куба нельзя.

Ответ: Получить нули во всех вершинах нельзя.

Задача №2

Найдите наименьшее простое число, которое можно представить в виде суммы двух, трёх, четырёх, пяти и шести различных простых чисел.

Ответ: Число 61.

Решение.

Сложив первые шесть простых чисел, получим 2 +3 +5 + 7 +11 + 13 = 41.

Искомое число не меньше 41. Число 41 – простое, но оно не может быть представлено в виде суммы двух простых чисел.

Если одно из этих чисел 2, то второе число – 39, а оно составное.

Если одно из этих чисел 3; 5; 7; 11 или 13, то второе – чётное.

Простое число 43 может быть представлено в виде суммы двух простых чисел (43 =41 +2), но его нельзя представить в виде суммы шести простых чисел.

По той же причине, что 41, отпадают простые числа: 47; 53; 59.

А вот число 61 удовлетворяет всем требованиям условия задачи:

61 = 2 + 59 = 3 +5 +53 = 2 + 5 +7 + 47 = 3 + 5 + 7 + 17 + 29 =2 + 3 + 5 + 7 +13 +31.

Ответ: Число 61.

Задача №3

Что больше $2021^{2021} + 2023^{2023}$ или $2021^{2023} + 2023^{2021}$?

Ответ: $2021^{2021} + 2023^{2023} > 2021^{2023} + 2023^{2021}$.

Решение.

Рассмотрим разность этих выражений определим её знак.

$2021^{2021} + 2023^{2023} – (2021^{2023} + 2023^{2021}) =$

$= 2023^{2023} – 2023^{2021} – (2021^{2023} – 2021^{2021}) =$

$= 2023^{2021}(2023^2 – 1) – 2021^{2021}(2021^2 – 1)$.

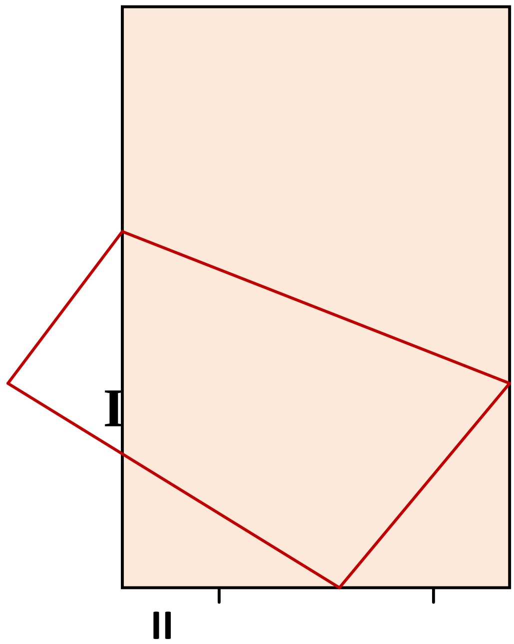
Но $2023^{2021} > 2021^{2021} > 0$ и $2023^2 -1 > 2021^2 -1 > 0$.

Значит, разность положительна и $2021^{2021} + 2023^{2023} > 2021^{2023} + 2023^{2021}$.

Ответ: $2021^{2021} + 2023^{2023} > 2021^{2023} + 2023^{2021}$.

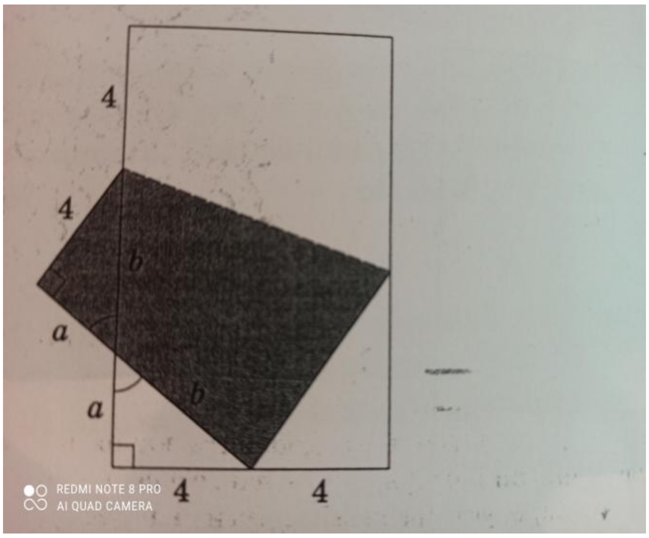
Задача №4

Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (рисунок 1.) Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.



Ответ: 12

Решение.



Отметим равные отрезки (рисунок 2 – здесь мы пользуемся тем, что в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны). Видим, что длина большей стороны равна (a + b + 4), а длина меньшей стороны равна (a + b).

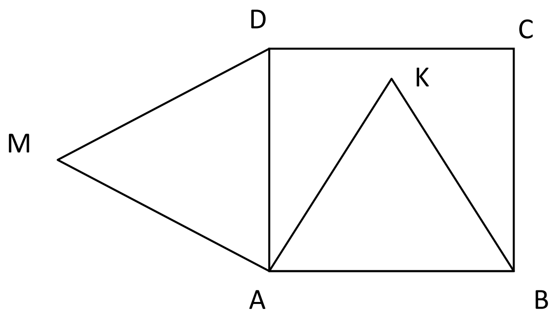
Значит , a + b +4 = 8 + 4 = 8 + 4 = 12.

Применив теорему Пифагора, можно найти длины сторон треугольников I и II. Оказывается, что египетские треугольники – треугольники со сторонами 3; 4 и 5.

Ответ: 12.

Задача №5

ABCD – квадрат. Треугольники AMD и AKB оба равносторонние (см . рисунок) . Лежат ли точки C, K и M на одной прямой?



Ответ: Точки C, K и M лежат на одной прямой.

Решение.
По условию $\angle MAD = \angle KAB = \angle KBA = \angle AKB = 60^\circ$, $\angle DAB = \angle CBA = 90^\circ$ и $MA = AD = AB = AK$, $BC = BA = BK$.

Вычислим углы равнобедренного треугольника MAK:
$\angle MAK = \angle MAD + \angle DAB - \angle KAB = 90^o$,
$\angle AMK = \angle AKM = (180^o - 90^o) : 2 = 45^o$
Вычислим углы равнобедренного треугольника CBK:
$\angle KBC = \angle CBA - \angle KBA = 30^o$,
$\angle BKC = \angle BCK = (180^o - 30^o) : 2 = 75^o$.
Имеем $\angle MKC = \angle AKM + \angle AKB + \angle BKC = 45^o + 60^o + 75^o = 180^o$,
т.е. точки, и лежат на одной прямой.
Ответ: Точки C, K и M лежат на одной прямой.