Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников Новосибирской области по математике 2023-2024 г.г.
Решение каждой задачи олимпиады оценивается из 7 баллов

8 класс
!Внимание!

Решения, полученные ребёнком, могут в корне отличаться от решений, приведенных здесь. Каждое правильное решение, вне зависимости от количества написанных букв, количества исписанных страниц и использования разных значений оценивается в 7 баллов. В графе “критерии” написаны возможные частичные продвижения, которые можно если не оценить полностью, то частично. Введение других частичных критериев возможно только с разрешения старшего по классу. Если критериев нет, то априорно предполагается, что задача считается либо решенной, либо нерешенной, но не отменяет того, что дополнительные критерии могут возникнуть в ходе проверки.

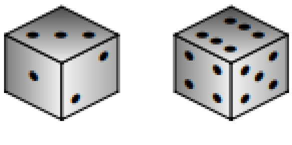
8.1. Существует ли такое простое трёхзначное число, сумма цифр которого является простым двузначным числом, а сумма цифр суммы цифр - простым однозначным числом? Если да, то напишите наибольшее число.

Ответ. 977

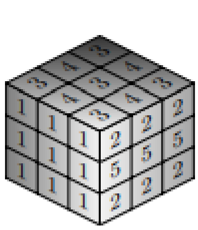
Решение. Максимальная сумма цифр трёхзначного числа - 27. Значит, единственные кандидаты на сумму цифр - 11, 13, 17,19 и 23 с соответствующими суммами цифр 2, 4,8,10 и 5. Отсюда единственные возможные кандидаты на сумму цифр 11 и 23, чьи наибольшие простые числа 911 и 977

Критерии. Найдены единственные кандидаты на сумму цифр, дальнейших продвижений нет - 11 и 23 - 4 балла

8.2. У фаната настольных игр Александра есть набор из 27 игральных шестигранных кубиков. Однажды он собрал их в куб 3х3х3 так, чтобы любых два кубика соприкасались одинаковым количеством точек. Какое наибольшее количество точек Александр может оставить видимыми снаружи куба 3х3х3?
Снизу показаны два различных ракурса на игральный кубик. Сумма противоположных граней кубика равна 7.



Ответ 189
Решение. Если у маленького кубика видимая сторона равна x, то на “невидимой” стороне этого кубика будет обязательно число 7- x. У большого кубика 27 пар различных сторон. Поэтому неважно как Александр будет раскладывать свои кубики, поскольку сумма точек будет равна 27*7 = 189. Примеров может быть очень много, один из них нарисован ниже



Критерии. Только оценка - 6 баллов, пример - 1 балл

8.3. В треугольнике ABC провели медиану BL. На продолжении медианы за точку B отметили точку S такую, что 2BS = AC. Докажите, что если угол ALB = 60 градусов, то AS = BC.

Решение. На BL отметим точку M, что LD = AL. Тогда ALM - равносторонний треугольник. Ну и так как SM = LS - LM = LS - BS = LB, AM = LC, угол AMS и BLC равны по 120 градусов, получается треугольники AMS и BLC равны по двум сторонам и углу между ними, и, стало быть, AS = BC как соответствующие элементы.

8.4. В одной небезызвестной стране 2024 города, пронумерованных числами от 1 до 2024, в которой решили проложить дороги. В целях экономии средств было предложен законопроект, согласно которому, дорога проводится между городами A и B, если A <B и выполнены следующие условия:

1. Номер города A делится на номер города B
2. Нет такого города C, что A<C<B, что C делится на A, и B делится на C.

А со сколькими городами по законопроекту должен соединяться город 42?

Ответ. 18

Решение. Рассмотрим пару соединённых городов. Докажем, что в одном этих двух городов при разложении на простые множители должен быть на один простой множитель больше. Их не может быть одинаковое количество очевидным образом. Докажем, что не может быть хотя бы двух различных множителей. Предположим противное и город A всё-таки соединили с городом B = A *p*q. где p, q - простые числа. Тогда, например мы нашли город C = A*p, на номер которого делится число B и получили противоречие с пунктом 2.

Число 42 раскладывается на простые множители как 2*3*7, значит среди меньших городов соединения есть только с городами 6, 14, 21. Числа, большие 42 и соединенные с ним имеют вид 42*p, где p - некоторое простое число. Наибольшее число, удовлетворяющее неравенству 42p <2024, является число 47, значит, все простые числа до 47 нам подходят, а их ровно 15. Итого городов, соединенных с городом 42 ровно 18.

Критерии. Доказано, что соединённые города отличаются на один простой множитель - 3 балла. Потеряны маленькие случаи - дыра в 2 балла

8.5. В новосибирском турнире по Counter-Strike 2 команде за победу присуждали 2 очка, за ничью - 1 очко, за поражение - 0 очков. Если по итогам у двух команд одинаковое количество очков, то более высокое место присуждалось той команде, у которой больше разница между выигранными и проигранными раундами (то есть команда имеющая счет по раундам 104 – 72 будет находиться выше, чем команда, например, со финальным счётом 104 – 95) . По итогам одного круга, где каждая команда сыграла с каждой командой победитель набрал 7 очков, второе место заняла команда с пятью, а третье - с тремя очками. Сколько очков могла набрать команда на последнем месте?

Ответ 2 очка

Решение. Пусть в турнире участвовало n команд, тогда в одном круге они разыграли $n(n-1)$ очко. Последние $n - 2$ команды набрали не больше 3 очков каждая, значит $7 + 5 + 3(n-2) \geqslant n(n-1)$, то есть n не больше 5.
Посмотрим теперь на победителя. Поскольку он набрал 7 очков, значит он провел хотя бы 4 игры. Значит, команд ровно 5, и количество разыгранных очков равно $5*4 = 20$.
Теперь, если четвертая команда набрала a очков, а последняя команда b - очков, тогда в сумме они разыграли $15+ a + b = 20$ очков, то есть $a+b = 5$. С учётом того, что $3 \geqslant a \geqslant b$, получаем, что $a = 3$ и $b = 2$.

Пример на два очка строится следующим образом - пусть первая команда выиграет у всех, кроме пятой, а с ней сыграет вничью, вторая команда выиграет у третьей и пятой, ничья с четвертой, третья команда сыграет вничью с четвертой и выиграет у пятой, и четвертая команда сыграет вничью с пятой.
Критерии. Доказано, что команд не больше пяти - 2 балла.
Доказано, что команд ровно 5 - два балла.
Доказано, что у последней команды ровно 2 очка - 1 балл
Приведён пример - 2 балла. Баллы суммируются.