ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2023/2024 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
8 КЛАСС

Задания для обучающихся

Время выполнения заданий – 235 минут

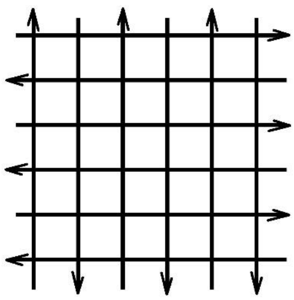
Максимальное количество баллов – 42

1. Для чисел a, b и c выполнено равенство $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=(a+b+c)^2$. Чему могут равняться a, b и c? Приведите все возможные значения.

2. Дома Незнайки и Кнопочки расположены вдоль прямой дороги, по которой регулярно ездит на своей машине Винтик. Ровно в 8 часов утра, когда машина Винтика ещё не доехала до домов, сумма расстояний от неё до дома Незнайки и Кнопочки равнялась 5 км. А через 5 минут машина уже миновала оба дома и сумма расстояний от неё до обоих домов снова была равна 5 км. Найдите скорость машины Винтика.

3. В трапеции $ABCD$ основание BC вдвое меньше основания AD, а диагональ AC равна боковой стороне CD. Найдите величину угла A трапеции.

4. В Мексиканском городе Прогресо все улицы односторонние, и две соседние улицы всегда разнонаправлены. Схема города указана на рисунке (расстояние между соседними улицами одинаково и равно 200 метров). Мексиканка Катрина находится на перекрестке, и бензина у нее осталось ровно на 1 километр. Но тут она замечает заправку на ближайшем перекрестке по диагонали. Хватит ли Катрине бензина доехать до заправки, соблюдая правила движения?



5. Собрались вместе рыцари и лжецы. Всего 123 человека. У каждого спросили: «Со сколькими лжецами среди присутствующих вы знакомы?» Все ответы оказались различны. Какое наибольшее количество рыцарей могло оказаться в этой компании? Не забудьте обосновать свой ответ. *Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.*

6. На доске записаны пять целых чисел, одно из которых равно 2023. Разрешается стереть любое число и вместо него написать $x+y-z$, где x, y, z – какие-то три из оставшихся четырех чисел. Можно ли с помощью таких операций получить пять чисел, каждое из которых равно 2023?

Материалы для членов жюри (ключи, критерии оценивания)

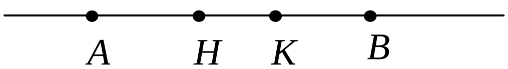
1. Для чисел a,b и c выполнено равенство $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=(a+b+c)^2$. Чему могут равняться a,b и c? Приведите все возможные значения.

Ответ. $a=b=c=0$. **Решение.** Раскроем скобки в левой части равенства, получим: $a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2ca+a^2$. Правую часть преобразуем к виду: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$. Приравнивая левую и правую части, получим $a^2+b^2+c^2=0$. Так как квадрат любого числа принимает только неотрицательные значения, то равенство выполняется только, если $a=b=c=0$.

Критерии. Верное решение – **7 баллов.** С помощью верных преобразований получено равенство $a^2+b^2+c^2=0$, но решение не завершено или содержит неверный вывод – **3 балла.** В остальных случаях – **0 баллов.**

2. Дома Незнайки и Кнопочки расположены вдоль прямой дороги, по которой регулярно ездит на своей машине Винтик. Ровно в 8 часов утра, когда машина Винтика ещё не доехала до домов, сумма расстояний от неё до дома Незнайки и Кнопочки равнялась 5 км. А через 5 минут машина уже миновала оба дома и сумма расстояний от неё до обоих домов снова была равна 5 км. Найдите скорость машины Винтика.

Ответ. 1 км/мин=60 км/ч. **Решение.** Пусть дома Незнайки и Кнопочки находятся в точках Н и К, а машина Винтика в 8 утра находилась в точке А, а через 5 минут – в точке В (см. рисунок).



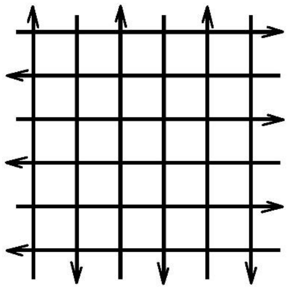
По условию АН+АК=ВН+ВК=5, тогда 2АВ= АН+НВ+АК+КВ=10, т.е. АВ=5. Получается, что за 5 минут машина проехала 5 км, поэтому за 60 минут она проедет 60 км.

Критерии. Верное решение – **7 баллов.** В остальных случаях – **0 баллов.**

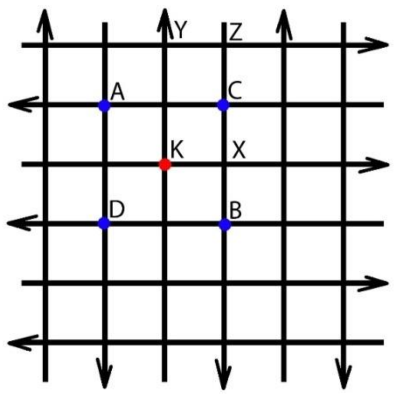
3. В трапеции $ABCD$ основание BC вдвое меньше основания AD, а диагональ AC равна боковой стороне CD. Найдите величину угла A трапеции.

Ответ. 90°. **Решение.** Опустим из точки C перпендикуляр CH на основание AD трапеции. Так как по условию треугольник ACD равнобедренный, то CH не только высота, но и медиана, значит $AH=HD=BC$. Тогда в четырехугольнике $ABCH$ стороны BC и AH равны и параллельны, значит это параллелограмм. Угол при вершине H – прямой, значит это прямоугольник, т.е. угол *A* также прямой. **Критерии.** Верное решение – **7 баллов.** В остальных случаях – **0 баллов.**

4. В Мексиканском городе Прогресо все улицы односторонние, и две соседние улицы всегда разнонаправлены. Схема города указана на рисунке (расстояние между соседними улицами одинаково и равно 200 метров). Мексиканка Катрина находится на перекрестке, и бензина у нее осталось ровно на 1 километр. Но тут она замечает заправку на ближайшем перекрестке по диагонали. Хватит ли Катрине бензина доехать до заправки, соблюдая правила движения?



Ответ. Да, хватит. **Решение.** Пусть Катрина стоит в точке K (как показано на рисунке). Тогда заметим, что заправка может находиться в одной из точек: A, B, C или D. До точки A – 400 метров (вверх и налево), до точки B тоже 400 метров (вправо и вниз). До точки C 800 метров (KYZC), до точки D тоже 800 метров (KXBD).



Заметим, что все точки-перекрестки на рисунке равнозначны, то есть при любом расположении точки K, возникают те же самые 4 варианта движения от нее до вершин соответствующего «квадрата 2х2».

Критерии. Верное решение – **7 баллов.** Указано, что возможны 4 случая, но верно рассмотрено только три из них – **5 баллов**, два из них – **4 балла**, один из них – **3 балла**. Не замечено, что есть 4 случая, а только рассмотрены три случая – **3 балла**, два случая – **2 балла**, один случай – **1 балл**. В остальных случаях – **0 баллов.**

5. Собрались вместе рыцари и лжецы. Всего 123 человека. У каждого спросили: «Со сколькими лжецами среди присутствующих вы знакомы?» Все ответы оказались различны. Какое наибольшее количество рыцарей могло оказаться в этой компании? Не забудьте обосновать свой ответ. *Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.*

Ответ. 62 рыцаря. **Решение.** Пусть в компании было x лжецов. Так все ответы на вопрос были различны, а рыцари всегда говорят правду, то среди ответов рыцарей могли быть только числа от 0 до x (x+1 различный ответ). Но рыцарей всего было 123–x, значит 123–x≤x+1, откуда следует x≥61, значит рыцарей не более 62. Причём 1-й рыцарь не знаком ни с одним лжецом, 2-й знаком с одним, 3-й с двумя, 4-й с тремя, …, 62-й с шестьдесят одним лжецом. Ответы рыцарей различны и правдивы, ответы лжецов по условию тоже различны, но не имеют значения (например, лжецы называют числа от 62 до 122).

Критерии. Обосновано, что рыцарей не более 62, описано, как именно они отвечают, подтверждено, что все ответы различны, приведены ответы лжецов – **7 баллов.** Обосновано, что рыцарей не более 62, описано, как именно они отвечают, подтверждено, что все ответы различны, но не приведены ответы лжецов – 5 **баллов.** Обосновано, что рыцарей не более 62, но пример, как такое может быть, не предъявлен в явном виде – 3 **балла.** Есть пример на 62, но нет доказательства оптимальности – 3 **балла.** В рассуждениях упущена возможность того, что рыцарь может иметь 0 знакомств с лжецами, в результате сделан вывод, что рыцарей не более 61 – **1 балл.** В остальных случаях – **0 баллов.**

6. На доске записаны пять целых чисел, одно из которых равно 2023. Разрешается стереть любое число и вместо него написать x+y–z, где x, y, z – какие-то три из оставшихся четырех чисел. Можно ли с помощью таких операций получить пять чисел, каждое из которых равно 2023?

Ответ. Да, можно.

Решение. Покажем, как можно действовать. Пусть исходный набор чисел: {2023, a, b, c, d}. На месте a и b запишем число c+d-2023. Затем в новом наборе {2023, c+d-2023, c+d-2023, c, d} заменим каждое из чисел c и d на число 2023 + (c+d-2023) – (c+d-2023) = 2023. В результате получим набор: {2023, c+d-2023, c+d-2023, 2023, 2023}. Осталось второе и третье число в последнем наборе заменить на 2023+2023 – 2023 = 2023 и получим набор из пяти чисел 2023.

Критерии. Предъявлен полный верный алгоритм или несколько последовательных шагов, которые можно повторить для получения требуемого – **7 баллов.** Решение не верно или только ответ – **0 баллов.**