Пермский край
2023-2024 учебный год

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
8 КЛАСС

Время выполнения заданий – 235 минут (3 часа 55 минут).
Максимальная оценка за выполнение всех олимпиадных заданий – 35 баллов (по 7 баллов за каждую задачу).

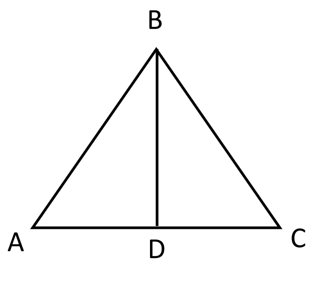
8.1. Дано двузначное натуральное число. Между цифрами десятков и единиц вписали 0. Полученное трехзначное число в 7 раз больше исходного. Найдите исходное число.
Ответ: 15.
Решение1. Пусть исходное число равно $10a+b$. После вписывания нуля получилось число $100a+b$. Значит $7(10a+b)=100a+b$, откуда $6b=30a$ или $b=5a$. b – это цифра, и она делится на 5. Значит либо $b=0$ (тогда $a=0$ и такое решение нам не подходит), либо $b=5$ (и тогда $a = 1$).
Решение2. Рассмотрим, на какую цифру может оканчиваться исходное число. Заметим, что получившееся трехзначное число (которое в 7 раз больше исходного) должно заканчиваться на ту же цифру. 0*7=0 (подходит), 1*7=7 (не подходит), 2*7=14 (не подходит), 3*7=21 (не подходит), 4*7=28 (не подходит), 5*7=35 (подходит), 6*7=42 (не подходит), 7*7=49 (не подходит), 8*7=56 (не подходит), 9*7=63 (не подходит). Итак, умноженное на 7 число будет оканчиваться на ту же цифру только если изначальное количество единиц в числе было равно 0 или 5. Далее число десятков можно найти перебором.
Критерии. Только ответ – 1 балл. Переборное решение, в котором рассмотрены не все случаи – не более 3 баллов. Из полного решения (на 7 баллов) должно быть понятно, что других чисел быть не может.

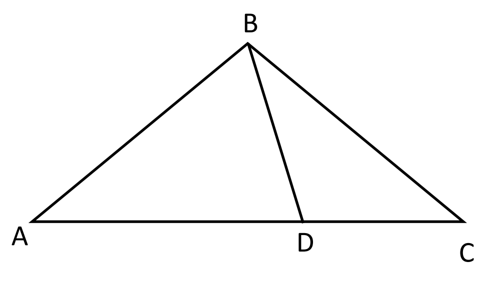
8.2. На острове проживают 2 племени: рыцарей и лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Однажды путешественнику повстречалась группа из 5 местных жителей, которые рассказали про себя следующее:
А: мы все из одного племени;
Б: среди нас есть по крайней мере один рыцарь;
В: оставшиеся двое (Г и Д) – из одного племени;
Г: В – лжец.
Последний (Д) промолчал. Сколько в этой группе могло быть рыцарей? Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.
Ответ: 2.
Решение. Если А – рыцарь, то все являются рыцарями. Но тогда Г не мог сказать про В, что тот лжец. Значит А – лжец. Он лжёт, что они все из одного племени, значит среди них помимо лжецов есть и хотя бы один рыцарь. Значит Б говорит правду и он – рыцарь. Если В – рыцарь, то Г лжёт. Но поскольку В говорит правду, что Г и Д из одного племени, значит и Д – лжец. Если же В – лжец, то Г прав и, следовательно, является рыцарем. Но В лжёт, что Г и Д из одного племени, значит Д – лжец. Итак, однозначно установить, является ли В рыцарем или лжецом – невозможно. Но из В и Г ровно один является рыцарем, а второй лжецом. При этом Д в любом случае является лжецом. Итак, всего в этой группе в любом случае ровно 2 рыцаря (один из них – Б, а второй – В или Г).

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Ответ верный, но решение учитывает только один вариант, кто именно из жителей является рыцарем (например, в решении утверждается, что В – обязательно рыцарь, а Г и Д – лжецы) – от 1 до 3 баллов в зависимости от того, доказано ли, что А – обязательно лжец, а Б – обязательно рыцарь.

8.3. Докажите, что среди любых 19 последовательных натуральных чисел найдётся число, сумма цифр которого делится на 10.
Решение. Среди первых 10 чисел найдется число, заканчивающееся на 0. Пусть его сумма цифр равна N. У нас есть ещё хотя бы 9 следующих за ним чисел. В них цифра единиц будет изменяться от 0 до 9, а остальные цифры меняться не будут. Значит сумма цифр в этих числах будет (N+1), (N+2), …, (N+9). Итак, у нас есть числа с суммами цифр N, (N+1), …, (N+9). Поскольку это 10 последовательных чисел, то одно из них делится на 10.
Критерии. Рассмотрен один конкретный пример из 19 последовательных чисел и в нём найдено число, сумма цифр которого делится на 10 – 0 баллов. Без доказательства утверждается, что среди исходных найдётся 10 чисел, суммы цифр которых образуют 10 последовательных чисел – не более 2 баллов.

8.4. В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) на стороне AC отметили точку D. Оказалось, что треугольники ABD и BCD тоже являются равнобедренными. Найдите углы исходного треугольника ABC.
Ответ: 45°, 45°, 90° либо 36°, 36°, 108°
Решение. Нужно рассмотреть несколько случаев в зависимости от того, какие пары сторон являются равными в получившихся равнобедренных треугольниках.
1) ∠BDA и ∠BDC прямые (рис. 1). Тогда AD=BD, CD=BD и углы получаются 45°, 45°, 90°.
2) Один из углов тупой, другой острый (рис. 2) (два тупых и два острых быть не могут, т.к. их сумма 180). Пусть ∠BDC – тупой, тогда точно CD=BD. В треугольнике ABD может быть по-разному.
2.1) AD=BD. Тогда AD=BD=CD, значит ∠DBC=∠DCB=∠DAB=∠DBA=45°. Тогда ∠BDC=90°, он не тупой, и такой случай невозможен.
2.2) BD=BA. Тогда BC=BA=BD=CD. То есть треугольник BDC получается равносторонним, в нём ∠BDC=60°, то есть не является тупым. Такой случай тоже не возможен.
2.3) AB=AD. Обозначим ∠BAC=∠BCA=x. Поскольку CD=BD, то ∠CBD=∠BCD=x. Тогда из треугольника BDC получаем, что ∠BDC=180-2x. ∠BDA смежный с ∠BDC, значит ∠BDA=180-(180-2x)=2x. Поскольку AB=AD, то ∠DBA=∠BDA=2x. Получаем, что в треугольнике ABD ∠DBA+∠BDA+∠BAD=2x+2x+x=180. Отсюда получаем, что 5x=180, x=36. Итак, в треугольнике ABC ∠A=∠C=36°, значит оставшийся ∠B=108°.
Критерии. Рассматривается только один случай (и получается только один из двух возможных ответов) – 2 балла. Рассматриваются два случая (и получаются оба ответа), но не упоминаются невозможные случаи – 4 балла. По существу верно рассмотрены все случаи, но при вычислениях величин углов допущена арифметическая ошибка – 6 баллов.





8.5. Дана квадратная доска 4х4 клетки. Малыш выбирает несколько клеток и кладет в них по одной конфете. Затем Карлсон выбирает 2 строки и 2 столбца (то есть в сумме – 12 клеток) и съедает все конфеты в них. Какое наименьшее количество конфет должен выложить Малыш, чтобы при любом выборе Карлсона на доске осталась хотя бы одна несъеденная конфета?

Ответ: 7.

Решение. Докажем, что 6 конфет недостаточно. Пусть Малыш выложил 6 или менее конфет. Отметим 2 строки с наименьшим числом конфет. В сумме в них не более 2 конфет. Действительно, если в них 3 или более конфет, то в одной из них конфет как минимум 2. Это строки с минимальным числом конфет, значит в каждой из остальных тоже не менее 2 конфет. Значит всего конфет не менее, чем 3+2+2=7, но их должно быть не более 6. Итак, в отмеченных строках конфет не более двух. Обе их Карлсон может съесть, выбрав соответствующие столбцы. Выбирая неотмеченные две строки (с максимальным числом конфет), Карлсон съедает все остальные конфеты.

Теперь докажем, что 7 конфет достаточно. Действительно, если расположить их как показано на рисунке, то при выборе любых 2 строк и любых 2 столбцов хотя бы одна конфета останется не в них.

К	К		
К		К	
	К	К	
			К

Критерии. Доказано, что конфет как минимум 7 – 4 балла. Приведён пример, как разложить 7 конфет – 3 балла.