

8 класс

1. Перед началом чемпионата школы по шахматам каждый из участников сказал, какое место он рассчитывает занять. Восьмиклассник Петя сказал, что займёт последнее место. По итогам чемпионата все заняли различные места, и оказалось, что каждый, кроме, разумеется, Пети, занял место хуже, чем ожидал. Какое место занял Петя?

Решение. Так как каждый из школьников (кроме Пети) занял место хуже, чем ожидал, то первое место не занял никто из них. Следовательно, первое место занял Петя. **Ответ:** первое.

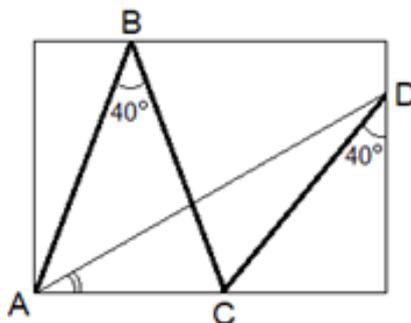
2. Сто произвольных целых чисел написаны на карточках, карточки выложены в ряд числами вверх. Сумма всех чисел - нечётная. Девочка и мальчик по очереди забирают себе по карточке с числом, но брать можно только одну карточку с краю (ребята видят все числа). Начинает девочка. Когда каждый наберёт по 50 чисел, игра заканчивается. Тот, у кого сумма чисел окажется больше, выигрывает. Может ли девочка действовать так, чтобы всегда выигрывать у мальчика, какие бы числа ни были написаны на доске?

Решение. Раскрасим числа попеременно в черный и серый цвета (на рисунке - пример для 14 чисел) и посчитаем суммы чисел каждого цвета. Они будут неравны, так как сумма всех 100 чисел нечётная.



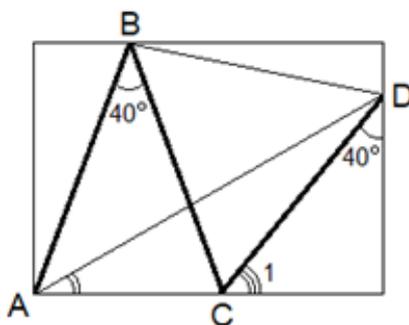
Пусть сумма серых чисел больше. Тогда девочка должна каждым ходом брать серое число. Она всегда сможет это сделать: перед ее ходом числа на краях разного цвета, она забирает серое число, оставляя на краях два черных числа, и мальчик вынужден брать черное число, оставляя после своего хода на краях числа разного цвета, и так далее. В итоге девочка заберёт все серые числа и выиграет. **Ответ:** может.

3. Вершины ломаной $ABCD$ лежат на сторонах прямоугольника. Все звенья ломаной равны, а два отмеченных на рисунке угла равны 40° . Чему равен угол CAD ?



Решение. В равнобедренном треугольнике ABC известен угол при вершине, поэтому $\angle ACB = 70^\circ$. В прямоугольном треугольнике, с острым углом 40° , найдем $\angle 1 = 50^\circ$. Далее, $\angle BCD = 180^\circ - (70^\circ + 50^\circ) = 60^\circ$.

Проведем отрезок BD . Получим равнобедренный треугольник BCD с углом 60° при вершине C . Тогда углы при его основании тоже по 60° , значит, треугольник BCD - равносторонний. Треугольник ABD тоже равнобедренный, потому что $BD = AB$, его угол при вершине B равен $40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$, поэтому $\angle BAD = (180^\circ - 100^\circ) : 2 = 40^\circ$. Искомый угол $\angle CAD = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$. **Ответ:** 30° .



4. Сколько существует 10-значных чисел, у которых произведение цифр, которые стоят на чётных местах, - чётное, а произведение цифр, которые стоят на нечётных местах, - нечётное?

Решение. Произведение цифр нечётно, когда все они нечётны, а чётно, когда среди них есть хотя бы одна чётная цифра. Количество способов выбрать последовательность из 5 нечётных цифр равно 5^5 . Количество способов выбрать последовательность из 5 цифр так, чтобы их произведение было чётным, найдём в виде разности общего количества последовательностей цифр и количества последовательностей, где все цифры нечётные: $10^5 - 5^5$. Поскольку множества чётных и нечётных мест не пересекаются, ответом будет произведение найденных величин: $5^5(10^5 - 5^5) = 302734375$.

Ответ: $5^5(10^5 - 5^5)$.

Комментарий. Вычислять полученное значение не обязательно.

5. На острове живут 33 рыцаря, а также лжецы и фантазёры. Каждого жителя этого острова по очереди спросили: «Сколько среди вас рыцарей?». Было получено десять различных ответов, каждый из которых был назван более, чем одним жителем. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда называют неверное число, которое ещё не было названо, а фантазёры всегда называют число, которое на единицу больше предыдущего ответа. Обязательно ли было названо число 40?

Решение. Назовём число m «начальным», если его назвали, а предыдущее число $m - 1$ не называли. Фантазёры по условию не называли начальных чисел. Если бы начальное число назвал лжец, то ни другой лжец, ни рыцарь не могли бы назвать его второй раз. Но каждое число было названо, как минимум, два раза. Поэтому начальное число могли называть только рыцари, и 33 - единственное начальное число. Кроме того, каждое число, отличное от 33, должен был назвать хотя бы один фантазер, так как лжецы не могут называть одно и то же число дважды. Это означает: 1) числа, меньшие, чем 33, названы не были (иначе наименьшее из них было бы начальным); 2) все десять названных чисел идут подряд (но не обязательно назывались в порядке возрастания).

Следовательно, названы все натуральные числа от 33 до 42 включительно, и 40 - среди них. **Ответ:** да, обязательно.

Комментарий. Описанная в условии ситуация возможна, например: 39л; 40ф; 33р; 34л; 36л; 35л; 36ф; 37ф; 38л; 41л; 42ф; 33р; 34ф; 35ф; 36ф; 37ф; 38ф; 39ф; 40ф; 41ф; 42ф; 33р; ...

Приводить подобный пример от участников не требуется.