8 класс

1. На рисунке 1 изображено числовое колесо. В кружочки поставьте первые девять нечётных простых чисел так, чтобы сумма любых трёх чисел, расположенных по диаметру, была простым числом.

а) Может ли при этом в центре колеса стоять цифра 5?

б) Может ли при этом в центре колеса стоять цифра 3?

Ответ: *а*) *может;* *б*) *не может.*

Решение. *а*) На рисунке 2 изображено числовое колесо, у которого в центре стоит цифра 5, при этом сумма любых трёх чисел, расположенных по диаметру, — простое число.

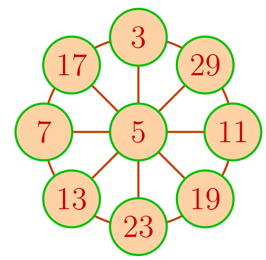

Рис. 2

б) Поставим в центр колеса цифру 3, и рассмотрим остатки от деления на 3 остальных восьми нечётных простых чисел 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Это числа 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 2. Среди этих остатков только три равны 1, поэтому на концах одного из четырёх диаметров придётся поставить число с остатком 2. Но тогда соответствующая сумма первоначальных чисел на этом диаметре будет делиться на 3, то есть не будет простым числом.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильное решение пункта *а*) — 3 балла. В пункте *б*) рассмотрены остатки от деления на 3 исходных простых чисел — 3 балла. Полное решение пункта *б*) — 4 балла.

2. Даны действительные числа a, b, c, причём $a > b > c$. Верно ли, что

$$a^2b + b^2c + c^2a > b^2a + a^2c + c^2b\,?$$

Ответ: *верно.*

Решение. Перенесём все слагаемые в левую часть и преобразуем полученное выражение:

$$a^2b + b^2c + c^2a - b^2a - a^2c - c^2b = ab(a-b) - c(a^2-b^2) + c^2(a-b) =$$
$$= (a-b)(ab - ac - bc + c^2).$$

В результате пришли к неравенству $(a-b)(b-c)(a-c) > 0$, которое верно, так как выражение в каждой из скобок положительно.

Критерии. Указан только ответ — 0 баллов. Попытка доказательства на конкретных наборах чисел a, b, c — 0 баллов. Получено разложение на два множителя — 2 балла, на три множителя — 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. За круглым столом сидят 100 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из них утверждает: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Сколько лжецов сидит за столом?

Ответ: 100 *лжецов.*

Решение. Допустим, первый человек — рыцарь. Тогда один из его соседей (назовём его вторым) — тоже рыцарь. Тогда с другой стороны от него сидит лжец. Из его ответа следует, что четвертый — рыцарь. Аналогично устанавливаем, что пятый — рыцарь, шестой — лжец, седьмой и восьмой — рыцари, девятый — лжец, и так далее, 99-й — лжец и 100-й рыцарь. Но тогда оба соседи первого — рыцари, как и он. Противоречие. Значит, рыцарей за столом нет.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что если есть рыцарь, то *все* сидящие за столом должны разбиваться на «тройки» вида `РРЛ` — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. *а*) Можно ли в таблице размером 6×6 расставить 36 целых чисел так, чтобы сумма четырёх чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех 36 чисел — положительной?

б) Можно ли в таблице размером 5×5 расставить 25 целых чисел так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех 25 чисел — положительной?

Ответ: *а*) *нельзя; б*) *можно.*

Решение. *а*) Квадратная таблица размером 6×6 легко разбивается на 9 квадратов размером 2×2. По условию сумма чисел в каждом квадрате 2×2 отрицательная, поэтому сумма чисел в 9 таких квадратах, равная сумме всех 36 чисел, тоже будет отрицательной.

б) Приведём пример нужной расстановки чисел в таблице размером 5×5 (рис. 3), который можно получить так. Сначала вписываем отрицательные числа в пять клеток — центральную и в четыре, имеющие с ней общую вершину, а неотрицательные — в остальные 20 клеток.

0	0	1	0	0
3	−4	2	−4	3
0	0	0	0	0
3	−4	2	−4	3
0	0	1	0	0

Рис. 3

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильное решение пункта *а*) — 3 балла; пункта *б*) — 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. В треугольнике ABC углы A и B равны $30°$ и $45°$ соответственно. На биссектрисе угла A вне треугольника ABC отметили точку M такую, что $\angle MBC = 90°$. Найдите угол MCB.

Ответ: $\angle MCB = 45°$.

Решение. (Рис. 4) Отметим на луче AC точку D, симметричную точке B относительно прямой AM. Обозначим через O точку пересечения перпендикуляра BD с биссектрисой AM. В треугольнике BMD высота MO является также медианой, поэтому треугольник BMD — равнобедренный, $MB = MD$.

Угол MLB равен сумме углов LAB и LBA — как внешний угол треугольника ALB, поэтому $\angle MLB = \frac{1}{2} \cdot 30° + 45° = 60°$. Значит, в прямоугольном треугольнике MBL угол BML равен $30°$. Тогда $\angle BMD = 2 \cdot \angle BML = 60°$. Следовательно, треугольник BMD — равносторонний, $BD = MB = MD$. По условию $\angle MBC = 90°$, и значит, $\angle DBC = 90° - 60° = 30°$.

Внешний угол BCD треугольника ABC равен сумме углов A и B, то есть равен $75°$. Отсюда в треугольнике BCD находим $\angle CDB = 180° - 75° - 30° = 75° = \angle BCD$, поэтому треугольник BCD — равнобедренный, $BC = BD$. Поскольку $BD = BM$, прямоугольный треугольник MBC — равнобедренный, и значит, $\angle MCB = 45°$.

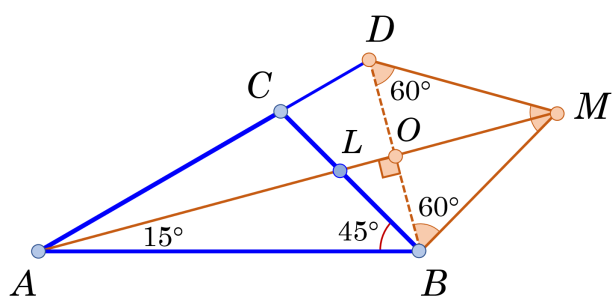

Рис. 4

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что треугольник MBD равнобедренный — 2 балла. Доказано, что треугольника MBD равносторонний — ещё 2 балла. Доказано, что треугольник BCD равнобедренный — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов.