Ключи к заданиям муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников 2023/24 учебного года по математике

Тула 2023

Список использованной литературы

Журналы:

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников».

Книги и методические пособия:

1. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Муниципальные олимпиады Московской области по математике. – М.: МЦНМО, 2019. – 400 с.

2. Агаханов Н. Х., Богданов И. И., Кожевников П. А., Подлипский О. К., Терешин Д. А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

3. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

4. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математика. Районные олимпиады. 6–11 классы. – М.: Просвещение, 2010.

5. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К., Рубанов И. С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

6. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К., Рубанов И. С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

7. Адельшин А. В., Кукина Е. Г., Латыпов И. А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007–2009. – М.: МЦНМО, 2011.

8. Андреева А. Н., Барабанов А. И., Чернявский И. Я. Саратовские математические олимпиады. 1950/51–1994/95 (2-е издание, исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

9. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.

10. Блинков А. Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006-2013. – М.: МЦНМО, 2014.

11. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998–2006. – М.: МЦНМО, 2014.

12. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

13. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е издание, стереотипное). – М.: МЦНМО, 2013.

14. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы (5-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2012.

15. Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2011.

16. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

17. Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

18. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное) – М., МЦНМО, 2013.

19. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 – 576 с.

20. Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс:

http://www.problems.ru/

Методические рекомендации для жюри муниципального этапа олимпиады по оцениванию работ участников

Общие критерии оценок приводятся в следующей достаточно условной таблице. К некоторым задачам имеются дополнительные комментарии к оцениванию.

Оценка	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1 – 2	Решения нет, но есть некоторые продвижения, которые являются частью решения.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). Дан ответ к задаче без обоснования, если этот ответ не подсказан условием, не является очевидным и может задать направление поиска решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует.

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Условия и решения задач

8.1. Сколько цифр в десятичной записи имеет наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 2023?

Ответ: 225.

Решение. Чтобы число было наименьшим, оно должно иметь в своей записи как можно больше цифр 9. Так как $2023 = 224 \cdot 9 + 7$, то наименьшим будет число, первой цифрой которого будет 7, а остальные 224 цифры – 9. Таким образом, это число имеет в своём составе 225 цифр.

8.2. В олимпиаде по математике приняло участие более 55 и менее 60 школьников. При этом число мальчиков составило более 90% и менее 91% от числа девочек. Сколько мальчиков и сколько девочек приняло участие в олимпиаде? Укажите все возможные случаи.

Ответ: 31 девочка и 28 мальчиков.

Решение. Пусть x и y – число мальчиков и число девочек соответственно. Тогда $56 \leq x + y \leq 59$ и $0.9 < \frac{x}{y} < 0.91$. Откуда $0.9y < x < 0.91y$, $1.9y < x + y < 1.91y$. Тогда

$1.9y < 59$ и $1.91y > 56$, а значит $29.3 < y < 31.05$. Если $y = 30$, то $27 < x < 27.3$, что невозможно. Если $y = 31$, то $27.9 < x < 28.21$, откуда $x = 28$.

8.3. Найдите значение выражения

$$\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{5^2+1}{5^2-1}+\frac{7^2+1}{7^2-1}+\cdots+\frac{99^2+1}{99^2-1}.$$

Ответ: 49.49.

Решение.

$$\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{5^2+1}{5^2-1}+\frac{7^2+1}{7^2-1}+\cdots+\frac{99^2+1}{99^2-1}=$$

$$=\left(1+\frac{2}{3^2-1}\right)+\left(1+\frac{2}{5^2-1}\right)+\cdots+\left(1+\frac{2}{99^2-1}\right)=$$

$$=49+\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}+\frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}+\cdots+\frac{1}{99-1}-\frac{1}{99+1}=$$

$$=49+\frac{1}{2}-\frac{1}{100}=49.49.$$

8.4. Ферзь стоит на поле f8 шахматной доски (см. рис.). За один ход его можно передвинуть на любое число полей влево, вниз или по диагонали влево вниз. Выигрывает тот, кто поставит ферзя на поле a1. Играют двое, ходят по очереди. Какой из игроков имеет выигрышную стратегию вне зависимости от игры другого?

	a	b	c	d	e	f	g	h
8						Ф		
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1	×							

Ответ: первый.

Решение. Пользуясь «анализом с конца», можно получить выигрышные позиции (отмечены плюсом на рисунке). Ставим плюс на поле a1, вычеркиваем все поля, с которых можно было попасть на эту клетку. Далее ставим плюсы в полях b3 и c2. Вычеркиваем все поля, с которых можно было попасть на эти клетки. Продолжая алгоритм, получим все выигрышные позиции.

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	-	-	-	-	+	Ф	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-

6	-	-	-	+	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	+
4	-	-	-	-	-	+	-	-
3	-	+	-	-	-	-	-	-
2	-	-	+	-	-	-	-	-
1	+	-	-	-	-	-	-	-

Выиграет тот, кто первым займет одну из выигрышных позиций. Так как у первого ходящего есть возможность уже на первом шаге занять одну из трех выигрышных позиций d6, e8, f4, то при правильной игре выиграет он.

8.5. Точка D выбрана на стороне BC остроугольного треугольника ABC так, что $DC = 2BD$. Найдите угол ACB, если $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

Ответ: 75°.

Решение. Проведём перпендикуляр CM к отрезку AD. Так как $\angle ADC = 60^\circ$, то $\angle MCD = 30^\circ$, откуда $MD = \frac{1}{2}CD$. Поскольку $DC = 2BD$, то $BD = DM$. Получаем, что $\angle MBD = \angle BMD = 30^\circ$, $\angle ABM = 15^\circ$. Также из равенства углов MBC и MCB следует, что $BM = MC$, а из равенства уголв MBA и MAB – $AM = MC$. Таким образом, треугольник ACM – прямоугольный и равнобедренный, и $\angle ACM = 45^\circ$. Тогда $\angle ACD = \angle ACM + \angle MCD = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.