8 класс

1. Используя каждую из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ровно по одному разу, знаки арифметических действий и скобки, получите число 2023.

   Ответ: например, $4 \cdot 5(97 + 8 - 6 + 1) + 23 = 2023$.

   Критерии оценки.

   1) Для получения полного балла (7 баллов за задачу) достаточно наличие верного примера.

2. Агроном Василий Иванович заметил, что если бы длина его прямоугольного поля была больше на 20 метров, то периметр поля был бы больше в 2 раза. А если бы ширина поля была больше в 2 раза, то периметр поля был бы больше на 18 метров. Чему равна площадь поля?

   Ответ: 99 м^2.

   Решение (первый способ). Если ширина поля увеличилась в 2 раза, то к периметру просто прибавилась два раза ширина поля, но по условию задачи это изменение равно 18 метрам, значит ширина поля равна 9 метрам. При увеличении длины на 20 метров периметр поля увеличится на 40 метров, но (по условию) это изменение равно периметру поля (так как периметр увеличился вдвое). Стало быть, периметр поля равен 40 метров. Тогда длина и ширина в сумме составляют 20 метров, а ширина равна 9 метрам, поэтому длина равна 11 метрам, а площадь $9 \cdot 11 = 99$ (м^2).

   Решение (второй способ). По сути, то же самое, но с буквенными обозначениями. Пусть длина поля равна x, а ширина поля равна y. Тогда периметр равен $2x + 2y$. При увеличении длины поля на 20 метров получается прямоугольник с длиной $x + 20$ и шириной y, его периметр равен $2(x + 20) + 2y$, по условию это равно $2(2x + 2y)$. Получили уравнение: $2(x+20)+2y = 2(2x+2y)$, откуда $2x+2y = 40$, тогда $x + y = 20$ м. При увеличении ширины исходного поля в 2 раза получаем прямоугольное поле с длиной x, шириной $2y$ и периметром $2x + 4y$, что по условию равно $2x + 2y + 18$. Из уравнения $2x + 4y =$

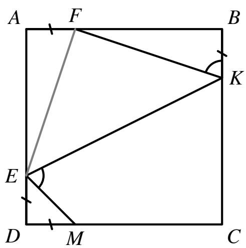
$= 2x + 2y + 18$ получаем, что $2y = 18, y = 9$ (метров). Тогда $x = (x + y) - y = 20 - 9 = 11$ (метров), а площадь равна $9 \cdot 11 = 99$ (м^2).

Критерии оценки.

1) Верный ответ без обоснования и без примера подходящей длины и ширины — ставить 1 балл.

2) Верный ответ без обоснования, но с указанием, при какой длине и ширине он получается, — ставить 2 балла.

3. На сторонах квадрата отложили 4 равных отрезка (как на рисунке). Докажите, что два отмеченных угла равны.



Решение. Заметим, что треугольники AFE и FBK равны. Следовательно $\triangle FEK$ — равнобедренный. $\triangle MED$ также равнобедренный, то есть $\angle FEK = \angle MED = 45°$. Отсюда получаем, что $\angle MEK + \angle AEF = 90°$. Но $\angle AEF = \angle BFK$, то есть $\angle MEK = 90° - \angle BFK = \angle FKB$.

Критерии оценки.

1) Доказано, что треугольник EFK — равнобедренный прямоугольный треугольник — 2 балла.

4. Имеется 7 одинаковых по внешнему виду монет. Среди них 5 настоящих (все одинакового веса) и две фальшивые (весят одинаково, но легче настоящих). Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти три настоящие монеты?

Решение. Занумеруем монеты $(1, 2, \ldots, 7)$. Первое взвешивание: положим на каждую чашу весов по три монеты: $1, 2, 3$ и $4, 5, 6$. А) Если чаши уравновесились, то на каждой чаше находится по одной фальшивой монете и 7-ая монета настоящая. Вторым взвешиванием сравниваем монеты 1 и 2. Если они уравновесились, то 1 и 2 монеты настоящие. Если 1-ая монета легче, то 2 и 3 настоящие. Б) Если монеты 1, 2, 3 легче, то монеты 4, 5, 6 — настоящие.

Критерии оценки.

1) Если в решении описаны не все результаты взвешивания, то решение оценивается не более, чем в два балла.

5. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на шахматной доске так, чтобы с любой из них на любую другую отмеченную клетку можно было пройти ровно двумя ходами шахматного коня?

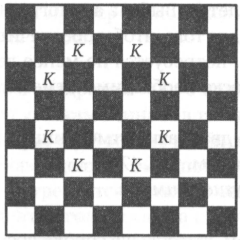
   Ответ: 8.

   Решение. Заметим, что одним ходом конь может перепрыгнуть не более чем через одну горизонталь или через одну вертикаль. Следовательно, все отмеченные клетки должны находиться в квадрате 5×5. Пусть конь находится на клетке какого-то цвета (белой или чёрной), тогда, сделав один ход, он окажется на клетке противоположного цвета. Таким образом, за два хода он окажется на клетке того же цвета, т. е. отмеченными должны быть клетки одного цвета. При этом клетки, расположенные на одной диагонали через клетку, не могут быть отмечены (за два хода из одной из них в другую конь не попадёт).

   Рассмотрим теперь квадрат 5×5. Без ограничения общности можно считать, что в нём 13 чёрных клеток и 12 белых. Предположим, что в нём отмечены белые клетки. Заметим, что в таком квадрате четыре белые диагонали. На каждой из них может быть отмечено не более двух клеток, иначе на диагонали найдутся две клетки, расположенные через одну. Значит, может быть отмечено не более восьми клеток.

   Допустим, что отмеченные клетки чёрные. Первым ходом с отмеченной чёрной клетки мы попадаем на белую, а с любой белой клетки внутри нашего квадрата за один ход можно попасть не более чем на 6 чёрных клеток. Следовательно, в этом случае отмеченных клеток не более семи. Таким образом, больше восьми клеток отмечено быть не может.

Пример для восьми отмеченных клеток см. на рисунке. Нетрудно убедиться, что он удовлетворяет условию задачи.



Критерии оценки.

1) За верный, но не обоснованный ответ с правильной расстановкой — 3 балла.