ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Муниципальный этап.

Ответы и решения

8 класс

8.1. Ответ: числа равны

Решение. $\frac{20222022}{20232023} = \frac{2022\cdot 10001}{2023\cdot 10001} = \frac{2022}{2023}$. Числа равны.

8.2. Ответ: (1012; 1011), (148; 141), (68; 51).

Решение. Разложим число 2023 на множители $2023 = 1\cdot 2023 = 7\cdot 17\cdot 17$.
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Для нахождения решения задачи надо найти решения следующих систем уравнений: $\begin{cases} a+b=2023, \\ a-b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=289, \\ a-b=7 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=119, \\ a-b=17 \end{cases}$
Решениями данных систем уравнений являются пары чисел (1012; 1011), (148; 141), (68; 51).

8.3. Решение. Медиана KP треугольника MNK является также высотой и биссектрисой, так как треугольник равнобедренный. Поэтому $\angle PNK = \angle PKN = \angle PKM = 45°$. Отсюда $PK = PN$, и, значит, треугольники PNR и PKQ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $PR = PQ$, и из равенства $\angle NPR = \angle KPQ$ следует $\angle RPQ = \angle RPK + \angle KPQ = \angle RPK + \angle NPR = \angle NPK = 90°$. Значит, треугольник RPQ – прямоугольный равнобедренный.

8.4. Решение. Пусть x – число «трудных» задач, y – число «легких задач». Тогда z – число задач, которые решили две девочки. Так как число всех задач равно 200, то имеем первое уравнение: $x + y + z = 200$. Так как «трудные» задачи решила всего одна девочка, «легкие» - три девочки, а оставшиеся задачи – две девочки, а также, учитывая, что все три девочки решили вместе 360 задач, то получим втрое уравнение: $x + 3y + 2z = 360$. Из данных уравнений получаем: $2y + z = 160$. А вычитая из первого полученное уравнение, имеем $x - y = 40$, что и требовалось доказать.

8.5. Ответ: 13, 13 и 22 года.

Решение. Из условия получаем $\overline{aa} + 2\overline{bc} = \overline{d(2d)}$, откуда следует, что a - четная цифра, т.е. $a = 2$ (теоретически возможно и $a \geq 4$, но тогда $d \geq 6$ и $2d$ уже не является цифрой). Значит $d = 3$ или 4. Первое невозможно, так как тогда возраст каждого из близнецов - $\frac{1}{2}(36 - 22) = 7$ лет, и они не могли участвовать в олимпиаде, во втором случае их возраст $\frac{1}{2}(48 - 22) = 13$ лет.