КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ
ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ
МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
2023/24 учебный год

9 класс

9.1. (*7 баллов*)

Найдите наименьшее натуральное число, обладающее такими свойствами:

- его половина – квадрат целого числа;
- его треть – куб целого числа;
- его пятая часть – пятая степень целого числа.

Ответ: $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^{6}$.

Решение: пусть a – искомое число. Тогда $a = 2^k \cdot 3^m \cdot 5^n$ (других множителей нет, так как a – наименьшее).

Найдем k, m, n.

$\frac{a}{2} = 2^{k-1} \cdot 3^m \cdot 5^n$ – квадрат целого числа, тогда показатели k - 1, m, n делятся на 2.

$\frac{a}{3} = 2^k \cdot 3^{m-1} \cdot 5^n$ – куб целого числа. Следовательно, числа k, m - 1, n делятся на 3.

Аналогично, числа k, m, n - 1 делятся на 5.

Итак, k – нечетное число (k делится на 3 и k делится на 5); k = 15 (наименьшее такое число). m – четное число, которое делится на 5; m = 10 (наименьшее такое число). n – четное число, которое делится на 3; n = 6 (наименьшее такое число).

Таким образом, $a = 2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^{6}$.

9.2. (*7 баллов*)

В выходной день каждый из учеников класса один раз побывал на катке. Известно, что каждый мальчик встретил там своих одноклассниц. Докажите, что либо все мальчики, либо все девочки встретились друг с другом.

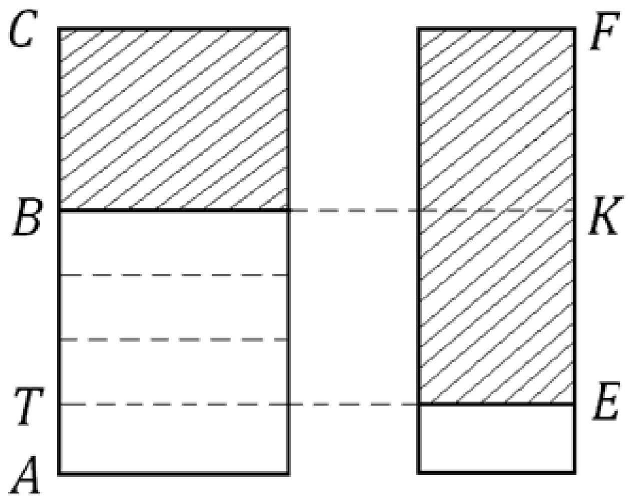
Решение: предположим, что не все девочки встретились друг с другом. Тогда есть девочки A и B такие, что A покинула каток раньше, чем туда пришла B. Но так как каждый мальчик встретился и с A, и с B, то все мальчики находились на катке весь промежуток времени между уходом A и приходом B. Тогда все мальчики встретились друг с другом. Отсюда вытекает условие задачи.

9.3. (*7 баллов*)

Имелось две свечи одинаковой длины, но разной толщины. Известно, что толстая свеча сгорает за 5 часов, а тонкая – за 4 часа. Когда погас свет, обе свечи зажгли одновременно. Когда свет вновь появился, свечи потушили. Оказалось, что огарок толстой свечи в 4 раза длиннее огарка тонкой свечи. Сколько времени горели свечи?

Ответ: 3 ч 45 мин.

Решение:



Изобразим штриховкой сгоревшие части свечей. Так как толстая свеча сгорает за 5 часов, а тонкая – за 4 часа, то тонкая свеча сгорает в 5/4 раза быстрее толстой: $FE = \frac{5}{4}BC$. Тогда $KE = \frac{1}{4}BC$ или $BC = 4KE$, $BT = KE$.

Так как $BT = KE$, то $AT = \frac{1}{3}BT = \frac{1}{3}KE$.

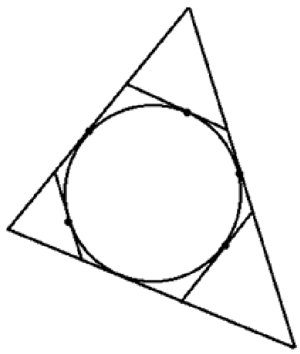
Тогда $AC = BC + BT + NA = 4KE + KE + \frac{1}{3}KE$, $AC = \frac{16}{3}KE$.

Составим пропорцию: $\frac{16}{3}KE : KE = 5 : x$, $x = \frac{15}{4}$ или 3 ч 45 мин.

9.4. (*7 баллов*)

В треугольник вписана окружность радиуса r. Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три маленьких треугольника. Пусть r_1, r_2, r_3 – радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

Решение: Пусть P – периметр большого треугольника, p_1, p_2, p_3 – периметры маленьких треугольников.



Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности равны, следовательно, $p_1 + p_2 + p_3 = P$ или $\frac{p_1}{P} + \frac{p_2}{P} + \frac{p_3}{P} = 1$.

Маленькие треугольники подобны большому, следовательно,

$$\frac{p_1}{P} = \frac{r_1}{r}; \frac{p_2}{P} = \frac{r_2}{r}; \frac{p_3}{P} = \frac{r_3}{r}.$$

Таким образом, получаем: $\frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} + \frac{r_3}{r} = 1$ или $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

9.5. (*7 баллов*)

Найдите все такие пары трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$, что корни второго трехчлена только числа a и b, а корни первого трехчлена – числа c и d.

Ответ: $x^2 + ax$ и $x^2 - ax$ (a – любое число); $x^2 + x - 2$ и $x^2 + x - 2$.

Решение: по теореме Виета:

$$a = -(c + d) \ldots (1)$$

$$b = cd \ldots (2)$$

$$c = -(a + b) \ldots (3)$$

$$d = ab \ldots (4)$$

Из (1) и (3) следует, что $a + c + d = 0$ и $a + c + b = 0$. Отсюда $b = d$.

Рассмотрим случаи:

а) $b = d = 0$, тогда из (1) и (3) следует, что $a = -c$.

При этих условиях получаем трехчлены $x^2 + ax$ и $x^2 - ax$. При любом a каждое из уравнений $x^2 + ax = 0$ и $x^2 - ax = 0$ имеет по два корня.

б) $b = d \neq 0$. Из равенств (2) и (4) следует, что $b = bc$ и $b = ab$ (так как $b \neq 0$, разделим оба равенства на b), тогда $c = 1$ и $a = 1$.

Получаем, что $1 + 1 + d = 0$, $d = -2$; $1 + 1 + b = 0$, $b = -2$.

Получаем еще пару трехчленов $x^2 + x - 2$ и $x^2 + x - 2$ (корни уравнения $x^2 + x - 2 = 0$ $x = -2$ и $x = 1$).