ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

9 класс

Решения задач.

9.1. Рассмотрим разность: $b - a = (x^2 + 13x + 3) - (x^2 - 3x - 2) = 16x + 5$. Она является нечетным числом (так как $16x$ всегда четно), поэтому числа a и b имеют разную четность, то есть одно из них обязательно четное. Но если простое число является четным, оно может быть равно только 2.

Уравнение $x^2 + 13x + 3 = 2$ натуральных корней не имеет, а уравнение $x^2 - 3x - 2 = 2$ имеет единственный натуральный корень $x = 4$.

Подставляя $x = 4$ в трехчлен $x^2 + 13x + 3$, получаем число 71, являющееся простым.

Ответ: $x = 4$.

9.2. Если v м/с — скорость самого медленного бегуна, то скорости остальных будут равны $(v + 0{,}1)$ м/с, $(v + 0{,}2)$ м/с, $(v + 0{,}3)$ м/с.

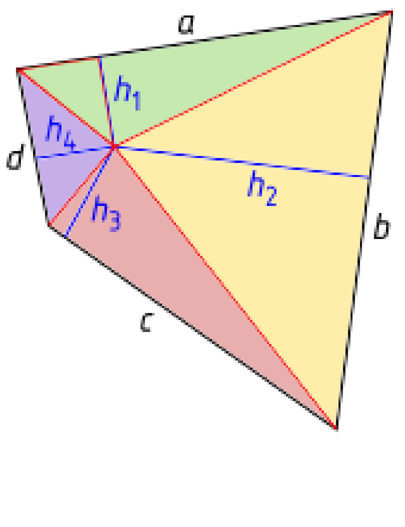
Первая команда пробежит эстафету за $\frac{400}{v} + \frac{400}{v + 0{,}3} = \frac{400(2v + 0{,}3)}{v(v + 0{,}3)}$ секунд,

а вторая — за $\frac{400}{v + 0{,}1} + \frac{400}{v + 0{,}2} = \frac{400(2v + 0{,}3)}{(v + 0{,}1)(v + 0{,}2)}$ секунд.

Числители дробей равны, поэтому меньше та из них, у которой знаменатель больше. Но $(v + 0{,}1)(v + 0{,}2) = v^2 + 0{,}3v + 0{,}02$ больше, чем $v(v + 0{,}3) = v^2 + 0{,}3v$. Следовательно, вторая команда быстрее пробежит эстафету.

Ответ: вторая команда.

9.3.



Докажем, что если h_1 , h_2 , h_3 , h_4 — расстояния от произвольной точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, до его сторон с длинами соответственно a, b, c, d, то $ah_1 + bh_2 + ch_3 + dh_4 = 2S$, где S — площадь данного четырехугольника. Это следует из того, что площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников, показанных на рисунке разными цветами, то есть $1/2\ ah_1 + 1/2\ bh_2 + 1/2\ ch_3 + 1/2\ dh_4 = S$.

Пусть теперь a, b, c, d — длины сторон данного четырехугольника, а S — его площадь, тогда по условию

$6a + 16b + 14c + 2d = 2S$,

$8a + 13b + 12c + 6d = 2S$.

Домножим второе уравнение на 2 и вычтем из результата первое уравнение, получим $10a + 10b + 10c + 10d = 2S$, откуда $r = 2S /(a + b + c + d)=10$.

Ответ: 10.

9.4.

Предположим, что мы смогли замостить доску 10×10 требуемым образом. Рассмотрим шахматную раскраску доски. На доске будет 50 белых и 50 черных клеток. Заметим, что каждая фигурка будет накрывать либо 3, либо 1 черную клетку (раскраска фигурок на рис.). Поскольку клеток 100, а каждая фигурка состоит из 4 клеток, то всего потребуется 25 фигурок. Но так как их будет нечетное количество, и каждая фигурка накрывает нечетное количество черных клеток (три или одну), то все фигурки накроют нечетное количество черных клеток. Однако они должны накрыть 50 черных клеток, 50 - четное число. Получили противоречие. Следовательно, доску 10 ×10 нельзя замостить фигурками данного вида.

9.5. Поскольку $y(0) = c$, то $C(0, c)$ и $A(-c, 0)$. Поэтому один из корней уравнения $x^2 - 20x + c = 0$ равен $-c$, т.е. $c^2 + 20c + c = 0$, откуда $c = -21$ (т.к. $c \neq 0$ по условию). Тогда корни уравнения: $x_1 = 21$, $x_2 = -1$. Длина основания треугольника равна $x_1 - x_2 = 22$, а высота 21. Итак, площадь треугольника 231.

Ответ: 231.