ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2023-2024 УЧЕБНЫЙ ГОД

РЕСПУБЛИКА БАШКОРТОСТАН

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители:

А.Н.Белогрудов, Н.Ф.Валеев, А.Р.Минниахметов, Э.А.Назирова, М.В.Саханевич, А.В.Столяров, К.В.Трунов

Рецензент Р.Н.Гарифуллин

УФА - 2023

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

1. Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях в материалы включаются не только ответы и решения заданий, но и критерии оценивания работ. Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри.
2. Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения разными членами жюри.
3. На математических олимпиадах применяется 7-балльная шкала оценки решений, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

При этом также необходимо придерживаться следующих правил:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачёркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

4. В случае возникновения затруднений по оцениванию решений жюри может обратиться в РПМК за дополнительными разъяснениями и консультациями.
5. Во время проверки работ 30.11.23 и 01.12.23 будет работать телеграмм-группа Муниципальные жюри математика 2023, ссылка

https://t.me/+kUieh-C3YJQ2MDZi

9 класс

1. Что больше $2023^{4048}+2024^{4046}$ или $2^{2024}\cdot 2023^{2024}\cdot 1012^{2023}$?

Решение. Найдем разность данных чисел:

$$\begin{aligned}2023^{4048}+2024^{4046}-\ 2^{2024}\cdot 2023^{2024}\cdot 1012^{2023} &=\\ &=(2023^{2024})^2+(2024^{2023})^2-2\cdot 2^{2023}\cdot 2023^{2024}\cdot 1012^{2023}=\\ &=\ (2023^{2024})^2+(2024^{2023})^2-2\cdot 2023^{2024}\cdot 2024^{2023}=\\ &=\ (2023^{2024}-2024^{2023})^2>0\end{aligned}$$

Так как разность положительна, следовательно, первое число больше.

Ответ: первое число больше.

Критерии: только верный ответ – 0 баллов.

2. На доске написана дробь $\frac{437}{444}$. Каждую секунду к числителю дроби добавляют натуральное число n, меньшее 40, а из знаменателя вычитают это же число n. Через какое наименьшее время могло оказаться так, что полученная дробь равна целому числу?

Решение: Через x секунд на доске появится число $\frac{437+nx}{444-nx}=\frac{-(444-nx)+881}{444-nx}=$ $=-1+\frac{881}{444-nx}$. Значит, на доске появится целое число только тогда, когда 881 делится на $444-nx$. Заметим, что 881 - простое число, следовательно $444-nx$ может равняться только -1, 1, -881. Получаем:

1) $444-nx=1$, $nx=443$ – простое число, с учетом того, что $n<40$ получаем, что в данном случае наименьшее значение $x=443$ (при $n=1$).

2) $444-nx=-1$, $nx=445=5\cdot 89$, с учетом того, что $n<40$ получаем, что в данном случае наименьшее значение $x=89$ (при $n=5$).

3) $444-nx=-881$, $nx=1325=5^2\cdot 53$, с учетом того, что $n<40$ получаем, что наименьшее значение $x=53$ (при $n=25$).

Следовательно, наименьшее значение $x=53$.

Ответ: 53

Критерии: Рассматриваются случаи (1)-(3), без объяснения, почему возможны только они – за каждый верно рассмотренный случай 1 балл.

Полученно представление $\frac{437+nx}{444-nx} = \frac{-(444-nx)+881}{444-nx} = 1 + \frac{881}{444-nx}$, но какой-то случай не рассмотрен — 5 баллов.

3. Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два положительных корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1. Сколько корней может иметь квадратный трехчлен $(a + c)x^2 + (a + b)x + (b + c)$?

Решение: 1) Рассмотрим случай когда $a>0$. Так как квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два положительных корня один из которых больше 1, а другой меньше 1, то $f(0)=c>0$ и $f(1)=a+b+c<0$. Следовательно, $a+c>0$ и для квадратного трехчлена $g(x) = (a + c)x^2 + (a + b)x + (b + c)$ $g(1)=(a+c)+(a+b)+(b+c)=2\cdot(a+b+c)<0$, при $a+c>0$. Следовательно, он имеет два корня.

2) Рассмотрим случай, когда $a<0$. Так как квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два положительных корня один из которых больше 1, а другой меньше 1, то $f(0)=c<0$ и $f(1)=a+b+c>0$. Следовательно $a+c<0$ и для квадратного трехчлена $g(x) = (a + c)x^2 + (a + b)x + (b + c)$ $g(1)=(a+c)+(a+b)+(b+c)=2\cdot(a+b+c)>0$ при $a+c<0$. Следовательно, он имеет два корня.

Возможно объединение случаев за счет рассмотрения произведений значений квадратного трехчлена в выбранных участником характерных точках.

Возможно рассмотрение только одного случая, если указано, как второй сводится к первому.

Ответ: два корня.

Критерии: Рассмотрен только один случай, о сведении к нему второго не упомянуто — 5 баллов. Начато исследование свойств квадратичной функции, исходя из свойств квадратного трехчлена, до конца не доведено – 1 или 2 балла в зависимости от степени продвижения.

4. Существуют ли 2023 целых числа, сумма квадратов которых равна 2023202320232023, а сумма всех их попарных произведений равна 2024202420242024?

Решение 1. Допустим такие числа существуют, тогда

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2 = 2023202320232023,$$

$$a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{2022}a_{2023} = 2024202420242024.$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2 + 2 \cdot (\ a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{2022}a_{2023}) = \\ = (\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{2023})^2 \\ = 2023202320232023 + 2 \cdot 2024202420242024 \end{aligned}$$

Заметим, что квадрат любого целого числа при делении на 4 дает остаток либо 0, либо 1, а число $2023202320232023 + 2 \cdot 2024202420242024$ при делении на 4 дает остаток 3. Получили противоречие. Значит, таких чисел не существует.

Ответ: Не существует.

Критерии: Рассмотрено выражение $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2 + 2 \cdot (\ a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{2022}a_{2023}) = (\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{2023})^2$, без дальнейших продвижений — 2 балла.

Только ответ — 0 баллов.

Решение 2. Заметим что для любого целого числа a_i^2 при делении на 4 дает остаток 0, либо 1 (причем для нечетных чисел – 1, для четных чисел – 0).

Так как число 20232023202320232023 дает остаток 3 при делении на 4, то количество нечетных чисел имеет вид $n = 4 \cdot k + 3$. Значит, в сумме попарных произведений $a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{2022}a_{2023}$ количество слагаемых, в которых оба множителя нечетные, будет равно $\frac{(4k+3)\cdot(4k+2)}{2} =$ $= (4k + 3)(2k + 1)$ – нечетное число. Значит, в сумме $a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{2022}a_{2023}$ нечетное число нечетных слагаемых. Следовательно, сумма всех возможных попарных произведений $a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{2022}a_{2023}$ нечетна, но по условию она четная. Противоречие. Значит, таких чисел не существует.

Ответ: Не существует.

Критерии: Доказано, что если такие числа существуют, то количество нечетных чисел среди них имеет вид $n = 4 \cdot k + 3$ – 4 балла.

Только ответ — 0 баллов.

5. В выпуклом четырехугольнике ABCD $\angle$B=120°, $\angle$D =30°. Точки M, N, P, Q - середины BC, AD, AC и BD соотвественно. Оказалось, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности. Найдите площадь ABCD, если BC =$2\sqrt{3}$, MQ= 4.

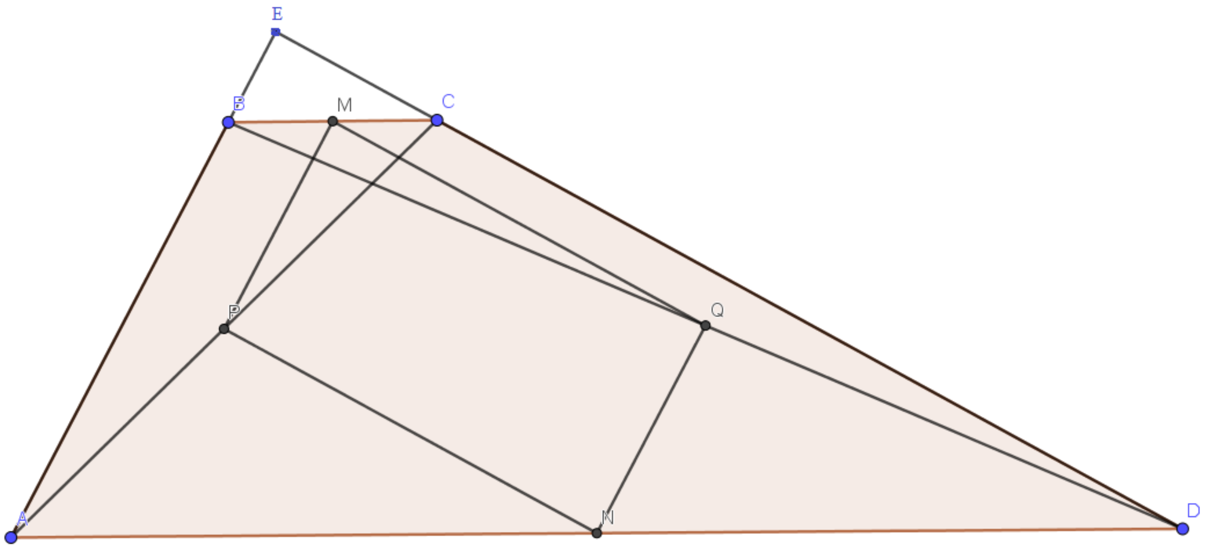
Решение: Рассмотрим ΔABC, так как M и P середины BC и AC соотвественно, то MP – средняя линия, значит $MP||AB$ и $MP = \frac{AB}{2}$.

Рассмотрим ΔABD, так как Q и N середины BD и AD соотвественно, то QN – средняя линия, значит $QN||AB$ и $QN = \frac{AB}{2}$. То есть $MP||QN$ и $QN = MP = \frac{AB}{2}$.

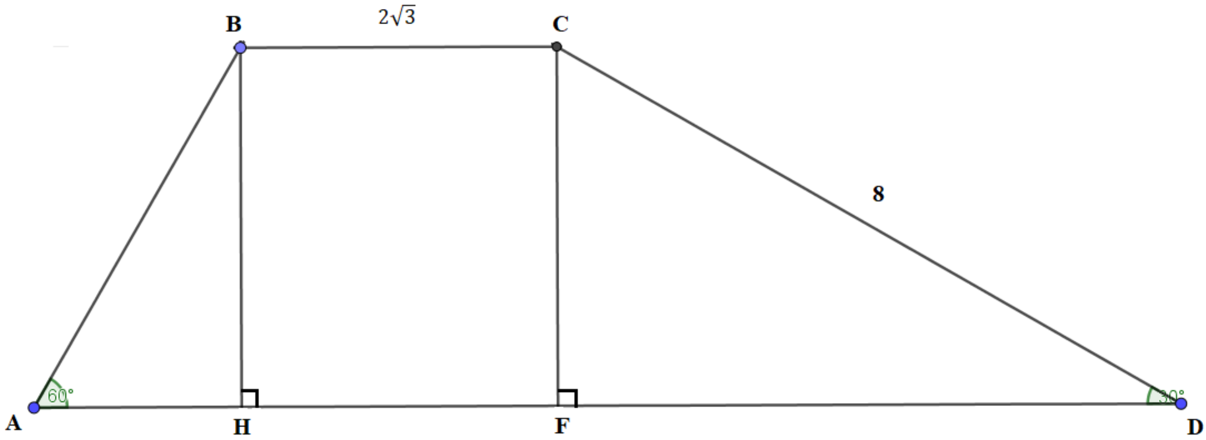
(Аналогично можно показать, что $MQ||PN$ и $MQ = PN = \frac{CD}{2}$, а значит CD =8)

Следовательно $MQPN$ - параллелограмм , а так как около него можно описать окружность, то $MQPN$ – прямоугольник. Так как $MP||AB$, $MQ||CD$ и $MP\perp MQ$, то $AB\perp CD$.

Продолжим стороны AB и CD до пересечения в точке E. ΔAED - прямоугольный, а так как $\angle$D =30°, то $\angle$A =60° . Заметим, что $\angle$A + $\angle$B =180°, значит BC||AD (AD и CD пересекаются в точке E). Получаем, что ABCD – трапеция, в которой BC =$2\sqrt{3}$, CD =8, $\angle$A =60°, $\angle$D =30°.



Построим высоты трапеции BH и CF, тогда BH=CF, BC=HF=$2\sqrt{3}$.



Рассмотрим ΔDFC – прямоугольный, с $\angle$CDF=30^0, значит $CF = \frac{CD}{2} = 4,$ $DF = \frac{\sqrt{3}}{2}CD = 4\sqrt{3}$.

Рассмотрим ΔBHC – прямоугольный, с $\angle$BAH=60^0, значит $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}BH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Получаем, что AD=AH+HF+FD =$\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \frac{22\sqrt{3}}{3}$

S_{ABCD}=$\frac{BC+AD}{2} \cdot CF = \frac{\frac{22\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = \frac{56\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{56\sqrt{3}}{3}$

Критерии: Доказано, что *MQPN* – прямоугольник – 3 балла.

Доказано, что ABCD – трапеция, в которой BC =$2\sqrt{3}$, *CD* =8, $\angle$A =60°, $\angle$D =30° – 5 баллов.

6. Клетки доски 8×8 раскрашены в 32 цвета так что каждым цветом окрашено ровно 2 клетки. Докажите что на доске можно расставить 8 ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета и не били друг друга.

Решение: Заметим, что общее число способов расставить 8 ладей на доске так, чтобы они не били друг друга равно 8·7·6·5· 4·3· 2·1= 8! (на первой вертикали 8 способами, на второй 7 и т.д.). Предположим, что нельзя расставить как указано в условии задачи. Тогда для любой расстановки не бьющих друг друга ладей хотя бы какие-то две из них стоят на клетках одного цвета. Теперь подсчитаем количество способов расстановки 8 ладей так, чтобы какие-то две ладьи стояли на клетках одного цвета, обозначим это число k: пару ладей стоящих на клетках одного цвета можно расставить не более чем 32 способами (их может быть меньше, так как клетки одного цвета могут стоять на одной горизонтали или вертикали, то мы ладьи поставить туда не можем). Остальные 6 ладей можно расставить 6! способами. Значит общее число способов расстановки в этом случае $k \leq 32 \cdot 6!$ Предположим, что ему не удастся это сделать. Это означает, что $k \geq 8!$ Но тогда $32 \cdot 6! \geq 8! \Leftrightarrow 32 \geq 8 \cdot 7$. Получаем противоречие.

Критерии: Найдено только количество способов расстановки 8 ладей на шахматной доске, чтобы они не били друг друга – 2 балла.

Найдена оценка на количество расстановок 8 ладей так, чтобы какие-то две ладьи стояли на клетках одного цвета – 4 балла.