Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2023 г.)

9 класс

1.Можно ли, пользуясь только операциями сложения, вычитания и умножения, составить из выражений $3x^2 + x$ и $3x$ выражение, тождественно равное x?

Решение. Предположим, что составить выражение, тождественно равное x, можно, то есть для всех x выполняется равенство $f(3x^2 + x; 3x) = x$. Но при $x = 2/3$ $3x^2+x=3x = 2$, следовательно, левая часть равенства принимает целое значения, а правая – дробное (равна 2/3).

Ответ: нет, нельзя

2. В некоторой фирме 17 сотрудников (коллег) используют для общения три мессенджера. При этом любая пара сотрудников общается только в одном мессенджере. Докажите, что можно создать группу, в которую входят не менее трех сотрудников, попарно общающихся друг с другом в одном и том же мессенджере.

*Решение***.** Пусть D_1 – один из сотрудников.

Предположим, что в каждом из мессенджеров он общается не более, чем с 5 сотрудниками или не общается вообще. Тогда количество его коллег не превышает $3\cdot5=15$, т.е. всего сотрудников не более 16, что противоречит условию.

Значит, есть мессенджер, в котором D_1 общается, по крайней мере, с 6 коллегами. Обозначим этот мессенджер x, а самих сотрудников - $D_2, D_3, ...D_7$.

Если среди сотрудников $D_2, D_3, ...D_7$ хотя бы одна пара общается между собой в мессенджере x, то вместе с D_1 они образуют искомую тройку попарно общающихся между собой в мессенджере x, в котором и можно создать групповой чат.

Рассмотрим теперь случай, когда среди сотрудников $D_2, D_3, ...D_7$ никто не общается между собой в мессенджере x. Обозначим два других мессенджера, которыми они пользуются y и z.

Допустим, что D_1 для общения с коллегами $D_2, D_3, ...D_7$ каждый из мессенджеров y и z либо не использует, либо использует не более чем с двумя коллегами из этого списка. Но, тогда общее количество сотрудников списка не более $2\cdot2=4$.

Полученное противоречие доказывает, что хотя бы одним из мессенджеров y или z D_2 пользуется для общения, по крайней мере, с тремя из коллег $D_2, D_3, ...D_7$. Будем считать, что это мессенджер y, в противном случае переобозначим мессенджеры y и z.

Пусть D_1 общается в мессенджере y с коллегами D_3, D_4, D_5, иначе переобозначим коллег из списка $D_3, D_4, ...D_7$. При этом возможно, что D_2 общается в мессенджере y и с одним или обоими коллегами D_6, D_7.

Если среди сотрудников D_3, D_4, D_5 хотя бы одна пара общается между собой в мессенджере y, то вместе с D_2 они образуют искомую тройку попарно общающихся между собой в одном мессенджере y, в которм и можно создать групповой чат.

Остался единственный случай, когда среди сотрудников D_3, D_4, D_5 никто не общается между собой ни в мессенджере x, ни в мессенджере y. Значит, они все попарно общаются в мессенджере z, в котором и можно создать чат.

Итак, хотя бы в одном из мессенджеров можно создать групповой чат, поскольку есть не менее трех сотрудников, попарно общающихся друг с другом в одном и том же мессенджере. Что и требовалось доказать.

3. Решить уравнение: $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$.

Решение. Сгруппируем скобки:

$$\big((x+2)(x+12)\big)\big((x+3)(x+8)\big)=4x^2;$$
$$(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)=4x^2;$$

вынесем из каждой пары скобок множитель x:

$$x\left(x+14+\frac{24}{x}\right)x\left(x+11+\frac{24}{x}\right)=4x^2;$$

Сократим левую и правую часть уравнения на множитель $x^2\neq 0$ (0 не является корнем данного уравнения, в чём можно убедиться с помощью подстановки).

$$\left(x+14+\frac{24}{x}\right)\left(x+11+\frac{24}{x}\right)=4;$$

введём замену $x+\frac{24}{x}=t$, получим:

$$(t+14)(t+11)=4;$$
$$t^2+25t+150=0;$$
$$\left[\begin{aligned}&t=-15,\\&t=-10;\end{aligned}\right.$$

выполняем обратную замену:

$$\left[\begin{aligned}&x+\frac{24}{x}=-15,\\&x+\frac{24}{x}=-15;\end{aligned}\right.$$

решив данную совокупность, находим корни:

$$\left[\begin{aligned}&x=-6,\\&x=-4,\\&x=\frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $-6;\ -4;\ \frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$.

4. Даны функции $p(x)$ и $q(x)$. Известно, что $p(x-1)=2x-1$ и $p(q(x))=4x-3$. Найти $q(x)$.

Решение. $p(x-1)=2x-1$. Значит, $p(x-1)=2(x-1)+1$. Отсюда следует, что функция имеет вид: $p(t)=2t+1$. Тогда $p(q(x))=2q(x)+1$. С другой стороны, $p(q(x))=4x-3$. Получим уравнение: $2q(x)+1=4x-3$, Следовательно, $q(x)=2x-2$.

Проверка: $p(q(x))=2q(x)+1=2(2x-2)+1=4x-4+1=4x-3$.

Ответ: $q(x)=2x-2$

5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $C_1A_1 \,||\, AC$. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1}\leq\frac{1}{4}S_{ABC}$.

Решение. Из условия $C_1A_1 \,||\, AC$ следует, что ΔBC_1A_1 подобен ΔBCA. Пусть

$x = C_1A_1 / AC$ – коэффициент подобия. Тогда высота в треугольнике BC_1A_1, опущенная из точки B на C_1A_1, равна xh, где h – высота треугольника BCA из точки B. Значит, высота в треугольнике $B_1C_1A_1$ из точки B_1 на C_1A_1 равна $h - xh = (1-x)h$. Таким образом, $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}(x \cdot AC) \cdot (1-x)h = x(1-x)S_{\Delta ABC}$. Максимум квадратичной функции $y(x) = x(1-x)$ достигается в точке $x_0 = \frac{1}{2}$ (абсциссе вершины параболы) и равен $\frac{1}{4}$, откуда следует результат.

Что и требовалось доказать.