МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

Республика Бурятия

2023–2024 учебный год

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Улан-Удэ
2023

ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ
И ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ОЦЕНИВАНИЮ РАБОТ

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года в Республике Бурятия проводится по заданиям, подготовленным Региональной предметно-методической комиссией в единый для всех муниципалитетов день — **11 декабря 2023 г.** Муниципальный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 7, 8, 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 5 задач. Продолжительность олимпиады составляет **3 часа 55 минут**. Единое время начала олимпиады для всех муниципалитетов — **10:00** по местному времени.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 35.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

В случае отсутствия *специальных критериев* по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Решение верное, но имеются небольшие недочёты.
5–6	В целом верное решение, которое содержит ошибки, пропущенные важные случаи, не влияющие на логику решения.
3–4	Решение делится на две равноценные части, участником решена одна из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Важно отметить, что жюри НЕ снимает баллы за:

1) объём текста (важно также понимать, что сколь угодно длинный текст без содержательных продвижений никак НЕ ОЦЕНИВАЕТСЯ);

2) почерк или способ оформления;

3) отличие решения участника от авторского.

Черновики работ не проверяются.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Региональная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников муниципалитетов.

9 КЛАСС

9.1. На острове Логики живут рыцари и лжецы. Рыцари на любой вопрос отвечают правду, а лжецы – ложь. Класс одной из школ острова писал контрольную работу. Оказалось, что только один ученик написал работу сам, а все остальные списали у него. Учитель выстроил всех вокруг себя и спросил: *«Тот, кто стоит справа от вас, списал работу?»* Каждый ответил отрицательно. Теперь учитель хочет спросить: *«Тот, кто стоит слева от вас, списал работу?»*. Докажите, что после полученных ответов учитель гарантированно определит, у кого все списали работу.

И. Двойнишников

Решение. Слева от того, кто написал работу самостоятельно, стоит рыцарь. Действительно, если бы слева от него стоял лжец, то среди ответов на первый вопрос встретился бы положительный ответ. Кроме того, из полученных ответов также следует, что этот рыцарь — единственный рыцарь в классе. Значит, при втором вопросе рыцарь будет единственным, кто изменит ответ, откуда учитель поймет, что справа от рыцаря стоит тот ученик, у которого все списали контрольную.

Критерии.

Полное верное решение — *7 баллов.*

Если участник решает задачу верно в предположении, что в классе какое-то конкретное количество учеников — *не более 4 баллов.*

Если участник решает задачу в предположении о составе класса (кто рыцарь, кто лжец) без объяснений — *0 баллов.*

9.2. Действительные числа x, y, z, t удовлетворяют системе

$$\begin{cases} xy + xz + xt + yz + yt + zt = 1; \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2. \end{cases}$$

Какое минимальное и какое максимальное значения может принимать величина $x + y + z + t$?

Д. Минеев

Ответ. -2 и 2.

Решение. Умножим первое равенство в системе на 2 и сложим со вторым. Получим

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt = 4,$$

$$(x + y + z + t)^2 = 4,$$

$$x + y + z + t = \pm 2.$$

Теперь остается заметить, что $x + y + z + t = 2$ при

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 0,\ t = 0,$$

а $x + y + z + t = -2$ при

$$x = -1,\ y = -1,\ z = 0,\ t = 0.$$

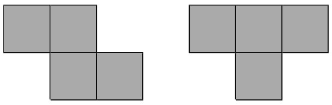
Критерии.

Полное верное решение — *7 баллов.*

Если не указано, при каких значениях выполняется $x + y + z + t = \pm 2$ — *не более 5 баллов.*

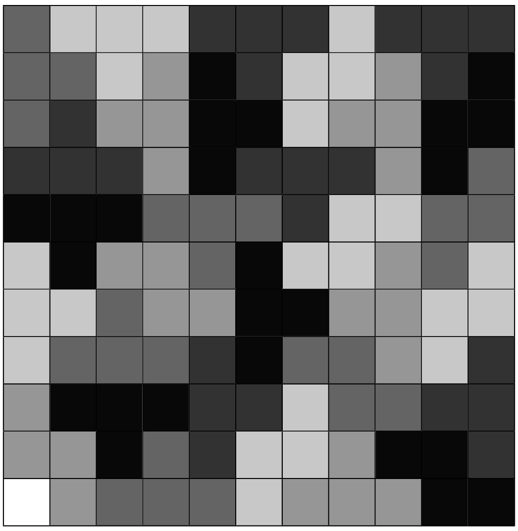
Только ответ — *0 баллов.*

9.3. У Васи на службе есть Джинн. По договоренности с ним, чтобы загадать желание, Вася закрашивает одну из фигурок, указанных на рисунке, в клетчатом квадрате 11×11 (любую на своё усмотрение, причём фигурку можно произвольно поворачивать и переворачивать, но граница должна идти по линиям сетки). Как только Вася не может закрасить фигурку, Джинн уходит со службы. Какое наибольшее количество желаний может загадать Вася?



И. Двойнишников

Решение. *Оценка.* В квадрате 11×11 всего 121 клетка. Каждая фигурка занимает 4 клетки, и $121 = 4 \cdot 30 + 1$, откуда закрасить больше 30 фигурок не получится. *Пример.* Наибольшее же количество можно закрасить, например, так:



Замечание. Оценочная часть этой задачи проста, но оценку нужно подтвердить примером, и может возникнуть вопрос о том, как этот пример построить. Сразу заметим, что правильных примеров много. Мы же приведём описание рассуждения, которое предшествовало примеру из решения.

Первое соображение заключается в том, чтобы не отмечать фигуры случайно — при таком подходе легко запутаться. Точно так же, как некоторую поверхность (стол, например) очищают от грязи постепенно, начав с края, так и пример разумно начать строить с какого-нибудь угла, постепенно добавляя новые фигурки. Второе соображение — размещать фигурки как можно более плотно, так как незакрашенной должна остаться все одна клетка, что следует из оценки. Кроме того, разумно действовать так, будто и этого ограничения нет – как-нибудь само разберется. Третье соображение — хороший план (идею) легко похоронить плохим исполнением.

Есть смысл в своих черновиках действовать по возможности аккуратно. Следить за этим стоит, поскольку конструкция массивная и очень легко запутать самого себя.

Критерии.

За отсутствие комментариев о том, чем руководствовался участник при построении примера, *баллы не снимаются*.

Полное верное решение — *7 баллов.*

Только пример — *5 баллов.*

Только оценка — *2 балла.*

9.4. Барон Мюнхгаузен утверждает, что ему удалось найти в правильном 2023-угольнике такие пересекающиеся диагонали AB и CD, а в правильном 2024-угольнике такие пересекающиеся диагонали XY и ZT, что угол между AB и CD равен углу между XY и ZT. Не обманывает ли нас Барон?

Д. Минеев

Решение. Докажем, что Барон обманывает нас, от противного. Пусть такие пары диагоналей существуют.

Пусть диагонали AB и CD правильного 2023-угольника P пересекаются в точке E. Без ограничения общности будем считать, что $\angle AEC$ — угол между AB и CD. Опишем окружность около P. Вершины P разбивают её на 2023 дужки, градусная мера каждой из которых равна

$$\varphi = \left(\frac{360}{2023}\right)^\circ.$$

Пусть дуги AB и CD, не содержащие точек C и A соответственно, содержат по a и b таких дужек соответственно. Тогда получим:

$$\angle AEC = \frac{1}{2}(\varphi a + \varphi b) = \left(\frac{180(a+b)}{2023}\right)^\circ. \qquad (*)$$

Аналогично, угол между XY и ZT равен

$$\left(\frac{180(x+y)}{2024}\right)^\circ,$$

где x и y — натуральные числа. По предположению,

$$\left(\frac{180(a+b)}{2023}\right)^\circ = \left(\frac{180(x+y)}{2024}\right)^\circ \Rightarrow 2024(a+b) = 2023(x+y).$$

Числа 2023 и 2024 взаимно просты, откуда число $a+b$ делится на 2023. Но при этом

$$0 < a+b < 2023,$$

откуда получаем противоречие.

Критерии.

Полное верное решение — *7 баллов.*

В решении содержится идея рассматривать описанную окружность правильного многоугольника и выражать углы между диагоналями через градусные меры её дуг — *1 балл.*

Получено равенство $(*)$ — *2 балла.*

Доказано, что $a+b$ делится на 2023 — *2 балла.*

Баллы за последние три пункта суммируются.

9.5. На доске записано n натуральных чисел. К каждому приписали в конце по одной цифре. При каком наименьшем n при любом таком приписывании среди новых чисел гарантированно найдутся два числа, разность которых делится на 1000?

И. Двойнишников

Решение. Сначала покажем, что если $n = 1001$, то для любого начального набора чисел и любого способа приписать к ним последнюю цифру среди нового набора чисел обязательно найдутся два таких числа, что их разность будет делиться на 1000. Действительно, после приписывания количество чисел по-прежнему будет равно 1001. Заметим, что остатков от деления на 1000 всего 1000. Но в таком случае найдутся два числа, которые будут иметь один и тот же остаток от деления на 1000. Их разность и будет делиться на 1000.

Теперь покажем, что если $n \leq 1000$, то можно так подобрать изначальные числа и так приписать к ним цифры, что разность никаких двух из них не будет делиться на 1000. Разберем только случай, когда $n = 1000$. Для $n < 1000$ построение аналогично. Пусть изначально на доске записаны числа

$$\underbrace{100,\ldots,100}_{10},\ \underbrace{101,\ldots,101}_{10},\ldots,\underbrace{199,\ldots,199}_{10}.$$

Возьмем первую группу из 10 чисел и припишем последовательно числам в ней цифры $0,1,\ldots,9$. Проделав аналогичное с остальными числами, получим набор

$$1000, 1001, 1002, \ldots, 1998, 1999.$$

Разность любых двух из них больше 0, но меньше 1000, а потому на 1000 не делится.

Критерии.

Полное верное решение — *7 баллов.*

Показано только, что $n \geq 1001$ — *3 балла.*

Построен пример для $n = 1000$ — *4 балла.*

Если при наличии примера на $n = 1000$ нет никаких комментариев про обобщение конструкции на $n < 1000$, то *баллы не снимаются.*

Пример для $n < 1000$, конструкция которого обобщается на другие значения, но при этом в тексте никак такая возможность не указана — *1 балл.*

Любой пример для $n < 1000$, способ конструирования которого никак не обобщается на другие значения — *0 баллов.*

Любая оценка вида $n \geq k > 1001$ — *0 баллов.*