Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2023/2024 учебный год

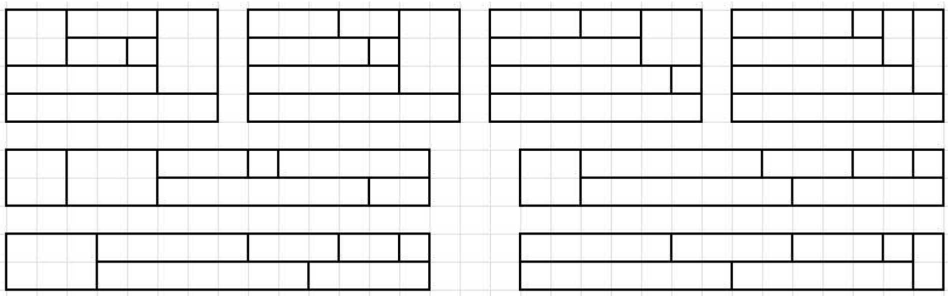
Решения задач и критерии оценивания. 9 класс

$\boxed{\mathbf{9.1}}$ *У чудака есть набор из 7 бумажных прямоугольников с целыми сторонами, имеющими площадь 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Какие прямоугольники он может гарантированно составить, используя весь набор прямоугольников?*

Решение: Площадь итогового прямоугольника должна быть $1+2+3+\dots+7=28$, поэтому получается один из трёх вариантов: 1×28, 2×14 и 4×7. Нам неизвестны размеры исходных прямоугольников, а только их площади и то, что стороны являются целыми. Для площади 4 и 6 существует по 2 разных прямоугольника, а остальные определяются однозначно. Значит наборы чудака состоят из прямоугольников 1×1, 1×2, 1×3, 1×4 или 2×2, 1×5, 2×3 или 1×6, 1×7 – всего 4 разных варианта наборов.

Прямоугольник 1×28 гарантировано сложить не получится, так как в наборе чудака мог быть 2×2. А вот для 2×14 и 4×7 есть примеры для всех возможных четырёх наборов чудака.

Приведём все восемь примеров.



Критерии:
- Доказано, что размеры итогового прямоугольника имеют два варианта — 3 балла;
- За каждый верный пример — полбалла (суммируется с округлением вниз).

$\boxed{\mathbf{9.2}}$ *Определите количество таких пар натуральных чисел (m, n), что $m \leqslant n$ и*

$$\text{НОД}(m,n)=2023,\ \ \text{НОК}(m,n)=20!\cdot 23!.$$

(Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$).

Решение: Для искомых пар (m,n) невозможно равенство $m=n$. Поэтому достаточно найти количество всех подходящих пар без условия упорядоченности и поделить пополам. Запишем разложения $2023=7\cdot 17^2$, $20!\cdot 23! = 2^a\cdot 3^b\cdot 5^8\cdot 7^5\cdot 11^3\cdot 13^2\cdot 17^2\cdot 19^2\cdot 23$. Для наибольшего общего делителя всегда выбирается наименьшая из степеней простого числа, входящего в разложение m и n, а для наименьшего общего кратного – наибольшая из степеней. Поэтому в одно из чисел m или n простой множитель 2 входит в степени 0, а в другой – в степени a, т.е. есть 2 варианта. Аналогично со всеми остальными простыми из разложения, кроме 17, которое входит в m и n в одинаковой степени. Всего у нас было 8 простых множителей, отличных от 17, и на каждый у нас есть по два независимых варианта. Значит всего комбинаций, как распределить простые множители по числам m и n будет 2^8, а итоговый ответ – половина этого числа, т.е. 128.

Критерии:
- Сформулировано, как распределяются степени простых множителей в НОК и НОД — 2 балла.
- Посчитано количество пар без учёта условия $m \leqslant n$ — минус 1 балл.

$\boxed{\mathbf{9.3}}$ *Ненулевые различные целые числа a, b, c и d таковы, что a и c положительны и не являются квадратами натуральных чисел. Могло ли оказаться, что уравнения $x^2+\sqrt{a}\,x+b=0$ и $x^2+\sqrt{c}\,x+d=0$ имеют общий корень?*

Решение: Да, такое возможно. Например, $x^2+\sqrt{7}x+1=0$, $x^2+\sqrt{3}x-1=0$ имеют общий корень $-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$. Есть и другие варианты.

Критерии:

- Приведён правильный пример, но не указан какой общий корень — минус 2 балла;
- Соображение и рассуждения, почему это невозможно — 0 баллов.

$\boxed{\mathbf{9.4}}$ *На плоскости нарисовано две окружности с общим центром. Из точки A, лежащей вне их, проведены две прямые, касающиеся большей окружности в точках B и C, и прямая, касающаяся меньшей окружности в точке D. Докажите, что DA – биссектриса угла $\angle BDC$.*

Решение: Обозначим через O общий центр окружностей. Тогда по свойству касательной $OB \perp AB$, $OC \perp AC$, $OD \perp AD$. Отсюда следует, что точки A, B, C, D и O лежат на одной окружности с диаметром AO. Хорды AB и AC этой окружности равны как отрезки касательных, поэтому стягивают равные дуги, а значит углы $\angle BDA$ и $\angle CDA$, опирающиеся на дуги AB и AC, равны.

Критерии:

- Отмечен центр и указана перпендикулярность радиусов и касательных — 2 балла;
- Доказано только, что какие-либо четыре точки из условия лежат на одной окружности — 4 балла (не суммируется с предыдущим).

$\boxed{\mathbf{9.5}}$ *Докажите, что любое целое число от* 1 *до* $2023!$ *можно представить суммой различных делителей числа* $2023!$ *(в сумме может быть одно число).*

Решение: Заменим 2023 на n и докажем общее утверждение по индукции. База индукции для $n=1$ выполняется, т.к. от 1 до 1! есть только одно число 1. Пусть утверждение верно для n, докажем его для $n+1$. Возьмём произвольное число m из промежутка от 1 до $(n+1)!$, запишем его как $m=(n+1)a+b$, где $0 \leqslant b \leqslant n$. Тогда для a верно $0 \leqslant a \leqslant n!$. По предположению индукции a представляется суммой различных делителей d_1, d_2, $\ldots$, d_k числа $n!$. Но тогда $m=(n+1)d_1+(n+1)d_2+\cdots+(n+1)d_k+b$ – сумма различных делителей числа $(n+1)!$.

Замечание. Это же решение можно переписать без индукции, используя спуск.

Критерии:

- Приведено доказательство, не гарантирующее различность слагаемых — 0 баллов;
- Рассмотрены частные случаи — 0 баллов.