Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2023 – 2024 учебный год
Математика
9 класс

Участникам муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году предлагается решить **5 задач**.

Задания составлены с учетом школьной программы по принципу «накопленного итога». Они включают как задачи, связанные с теми разделами школьного курса математики, которые изучаются в текущем году, так и задачи по пройденным ранее разделам. Решения задач помимо знания участниками стандартной школьной программы по математике (алгоритмы, теоремы) предполагают владение навыками построения логических конструкций, доказательства цепочек математических утверждений.

Полное верное решение каждой задачи оценивается в **7 баллов**.

Максимальная сумма баллов за решение пяти задач олимпиады составляет **35 баллов**.

Требования к проверке работ:

1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;

2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

В комментариях к отдельным задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений.

Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

9.1. Решите уравнение $1 - (2 - (3 - (\ldots 2022 - (2023 - (2024 - x))\ldots))) = 1012$.
Ответ: $x=2024$.
Решение. Открыв скобки, получим $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots +2023 - 2024 + x = 1012$; $-1012 + x = 1012$; $x=2024$.

9.2. В формулу линейной функции $y = kx + b$ вместо букв k и b впишите числа от 1 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось 10 функций, графики которых проходят через одну и ту же точку.

Ответ: например, у = ***1****x* + ***20****,* у = ***2****x* + ***19****, ...,* у = ***10****x* + ***11*** или у = ***1****x* + ***2****,* у = ***3****x* +***4****, ...,* у = ***19****x* + ***20****.*

В первом случае график каждой функции пройдет через точку (1; 21), а во втором случае − через точку (-1; 1).

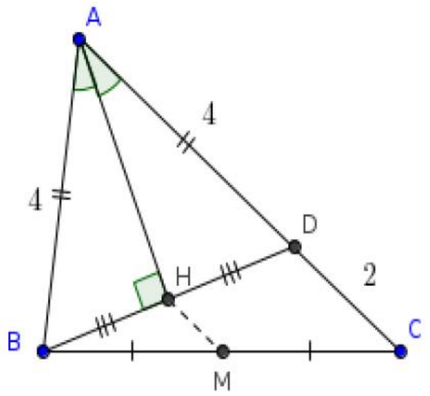
Возможны и другие примеры.

Комментарий. Приведен верный ответ и указана точка, через которую проходят все графики − 7 баллов,
приведен верный ответ, но общая точка графиков не указана − 3 балла,
приведен неверный ответ − 0 баллов.

9.3. В треугольнике ABC известны длины сторон: AB = 4, BC = 5, CA = 6. Точка M − середина отрезка BC, а точка H − основание перпендикуляра, опущенного из B на биссектрису угла A. Найдите длину отрезка HM.

Ответ. 1.

Решение. Пусть D − точка пересечения прямой BH с прямой AC. Треугольник ABD равнобедренный, так как в нем совпадает биссектриса и высота из вершины A. Следовательно, H − середина отрезка BD. Тогда HM − средняя линия треугольника BCD. Заметим, что $CD = AC - AD = AC - AB = 6 - 4 = 2$, откуда $HM = CD/2 = 1$.



9.4. Сколько способов переставить буквы слова БИОМЕТРИЯ, чтобы никакие две согласные буквы не стояли рядом?

Ответ: 21600.

Решение. Сначала расставим гласные буквы, среди которых две буквы И. Переставить их можно 5!/2 = 60 способами. Теперь образуется 6 мест, на которые можно ставить согласные буквы (на каждом месте не более одной согласной) − это четыре промежутка между гласными, а также места спереди и сзади. Букву Б ставим на любое из 6 мест. Теперь для М доступны 5 мест. После этого место для Т выбираем 4 способами, и наконец для Р тремя способами. По правилу произведения всего 60 • 6 • 5 • 4 • 3 = 21600.

Комментарий. Верное решение − **7 баллов,** за арифметическую ошибку (при верном рассуждении) − **6 баллов,** если неверно подсчитано число перестановок гласных букв, но верно выполнена вторая часть решения, − 2 балла.

9.5. Десять футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по x очков. Каково наибольшее возможное значение x? (Победа − 3 очка, ничья − 1 очко, поражение − 0.)

Ответ: 13.

Оценка. Докажем, что x не может быть больше, чем 13. Действительно, в каждом матче разыграно либо 3 очка (если победила одна из команд), либо 2 очка (если была ничья). Всего было сыграно $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ матчей, значит, разыграно не более, чем 135 очков, то есть сумма очков, набранных всеми командами, не больше, чем 135. Таким образом, $10x \leq 135$, то есть $x \leq 13{,}5$.

Так как x — целое число, то $x \leq 13$.

Пример. Покажем, что по 13 очков команды набрать могли. Расположим команды по кругу и разобьём их последовательно на 5 пар. Пусть команды каждой пары сыграли между собой вничью, каждая из них выиграла у четырёх команд, следующих за данной парой по часовой стрелке, а остальным командам проиграла. Тогда каждая команда набрала ровно 13 очков.

Аналогичный пример можно предъявить и в виде таблицы.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	
A		1	3	3	3	3	0	0	0	0	13
B	1		3	3	3	3	0	0	0	0	13
C	0	0		1	3	3	3	3	0	0	13
D	0	0	1		3	3	3	3	0	0	13
E	0	0	0	0		1	3	3	3	3	13
F	0	0	0	0	1		3	3	3	3	13
G	3	3	0	0	0	0		1	3	3	13
H	3	3	0	0	0	0	1		3	3	13
I	3	3	3	3	0	0	0	0		1	13
K	3	3	3	3	0	0	0	0	1		13

Комментарий. *Полное обоснованное решение* − 7 баллов,
приведены верный ответ и пример − 3 балла,
доказано только, что $x \leq 13$ − 3 балла,
приведен только ответ − 0 баллов.

Интернет-ресурсы:
http://www.problems.ru, https://olimpiada.ru, https://siriusolymp.ru/mathematics.