

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ.
2023-2024 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
9 КЛАСС

Задание 9.1. (7 баллов)

Действительные числа x и y удовлетворяют уравнению

$$x^2 y^2 + x^2 - 10xy - 8x + 16 = 0.$$

Какие значения может принимать произведение xy ?

Ответ: $0 \leq xy \leq 10$.

Решение.

Выделив полные квадраты, получим: $(xy - 5)^2 + (x - 4)^2 = 25$.

Значит $(xy - 5)^2 \leq 25$. Решив неравенство, получим $0 \leq xy \leq 10$.

Ответ: $0 \leq xy \leq 10$.

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное обоснованное решение
6-5	Решение верно, но не проверено равенство 0 и(или) 10.
3-4	Имеются верные преобразования, уравнение сведено к сумме квадратов и получены частные решения
1-2	Имеются верные преобразования, уравнение сведено к сумме квадратов.
0	Решение отсутствует или полностью неверно .

Задание 9.2. (7 баллов)

Дан квадрат ABCD. На его сторонах AB и AD и диагонали BD построены равносторонние треугольники ABE, ADF и BDG. При этом точка E лежит вне квадрата, точка F – внутри квадрата, G и C расположены в разных полуплоскостях относительно BD. Докажите, что отрезки FD и EG параллельны и равны.

Решение (опорные моменты для жюри)

Доказываем, что $\angle EAF = 90^\circ$, $\angle EFD = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$, $\angle FDG = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$ (необходимо обоснование).

Так как $\angle EFD + \angle FDG = 180^\circ$, то прямые EF и DG параллельны.
 $EF=BD=DG$.

Значит EFDG – параллелограмм, откуда следует требуемое утверждение.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное обоснованное решение
6-5	Задача решена, но не прописаны все признаки и свойства.
4	Доказано равенство требуемых отрезков
3	Доказано, что прямые EF и DG параллельны с подробным вычислением всех необходимых углов
1-2	Доказано, что $EF=DG$.
0	Решение отсутствует или полностью неверно.

Задание 9.3. (7 баллов)

Имеются три картонных клетчатых прямоугольника 4×3 , 4×7 и 4×17 . Двое по очереди вырезают из них любой клетчатый прямоугольник (возможно весь) и выбрасывают. Выигрывает тот, кто выбросит последнюю клетку. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Выигрывает первый игрок.

Решение.

Первый игрок из прямоугольника 4×17 вырезает 4×7 , оставив вместо него два прямоугольника 4×3 и 4×7 . Теперь возникают две пары одинаковых прямоугольников 4×3 и 4×7 , после чего первый игрок совершает ходы, симметричные ходам второго игрока в аналогичном прямоугольнике.

Ответ: Выигрывает первый игрок.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное обоснованное решение
6-5	Задача решена полностью, но есть небольшие недочёты в обосновании
0	Решение отсутствует или полностью неверно.

Задание 9.4. (7 баллов)

Натуральные числа a, b, c, d связаны равенством $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Найдите все натуральные числа p такие, что верно равенство $(a + b + c + d)p = 2023$.

Ответ: Таких чисел нет.

Решение.

Так как $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(c^2 + d^2)$, то сумма $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ чётная. Так как $n^2 - n = n(n - 1)$ чётно при натуральных n , то из равенства $a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c + d^2 - d = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)$ следует, что $(a + b + c + d)$ чётно. Так как $a + b + c + d > 2$, то оно чётное составное число. Но при умножении чётного числа на любое натуральное число получим чётное число, а 2023 является нечётным.

Ответ: Таких чисел нет

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное обоснованное решение
6-5	Задача решена полностью, но есть небольшие недочёты в обосновании
1-2	Имеется ряд верных рассуждений, но ответ задачи не получен.
0	Решение отсутствует или полностью неверно .

Задание 9.5. (7 баллов)

Два туриста выезжают одновременно навстречу друг другу из двух пунктов А и В. При встрече оказалось, что первый проехал на 40 км больше второго и что через четыре дня он будет в пункте В. Второй попадёт в пункт А через 9 дней после встречи. Найти расстояние между пунктами А и В.

Ответ: 200 км.

Решение.

Пусть второй проехал до места встречи x км, тогда первый проехал $(x+40)$ км. Так как скорости прямо пропорциональны пройденному пути, то

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x + 40}{x}$$

или

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{9x}{4(x + 40)}$$

Приравнивая правые части и решая уравнение, получим $x=80$.

Ответ: 200 км.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное обоснованное решение
5	Решение верно, но допущена арифметическая ошибка
3-4	Имеются верные рассуждения, но уравнение не решено
1-2	Имеется ряд верных рассуждений, но уравнение не составлено.
0	Решение отсутствует или полностью неверно .