9 класс – 2023

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в *комментариях* к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

9.1. Найдутся ли такие действительные числа a, b, c, что $a + \frac{1}{b} = c$, $b + \frac{1}{c} = a$, $c + \frac{1}{a} = b$?

Ответ: НЕТ.

Доказательство. Перепишем уравнения в виде $ab + 1 = bc$, $bc + 1 = ac$, $ac + 1 = ab$ и сложим их. Получим $ab + bc + ac + 3 = bc + ac + ab$. У этого уравнения нет решений.

9.2. Докажите, что если p – простое число, m и n – целые неотрицательные числа и $p^2 + m^2 = n^2$, то $m > p$.

Доказательство. Так как $p^2 = (n – m)(n + m)$, p – простое число и $n – m < n + m$, то $n – m = 1$ и $n + m = p^2$. Поэтому $p^2 = n^2 – m^2 = (m+1)^2 – m^2 = 2m + 1$. Следовательно p – нечётно, $2m + 1 = p^2 \geq 9$, $m \geq 4$ и $p^2 = 2m + 1 < m^2$.

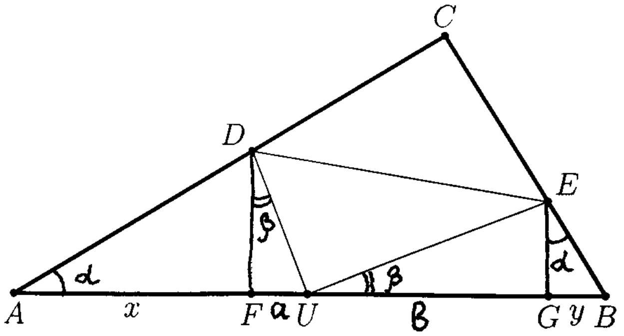
Комментарии. Показано, что $p^2 = 2m + 1$ – 2 балла.

9.3. Найдите все возможные значения выражения $x^5 + x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 13x + 2023$, если $x(x^2 + 2) = -7$.

Ответ: 2002.

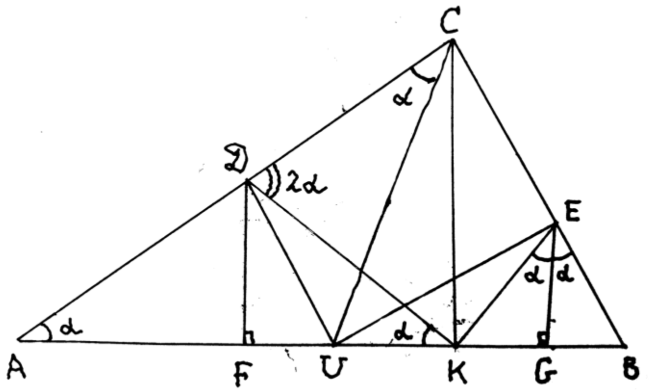
Решение. Поделив многочлен $x^5 + x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 13x + 2023$ на многочлен $x^3 + 2x + 7$, получим: $x^5 + x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 13x + 2023 = (x^3 + 2x + 7)(x^2 + x + 3) + 2002$. Так как по условию $x^3 + 2x + 7 = 0$, то $x^5 + x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 13x + 2023 = 2002$.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.



9.4. Точка U – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC отмечены точки соответственно D и E так, что угол DUE – прямой. Из точек D и E опущены перпендикуляры DF и EG на гипотенузу AB. Докажите, что $FG = AB/2$.

1-е доказательство. В соответствии с обозначениями на рисунке достаточно проверить, что если $x + a = y + b = AB/2 = c/2$, то $x + y = a + b$. Имеем: $x + a = x + x\cdot\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta = y + b = y + y\cdot\text{ctg}\alpha\cdot\text{ctg}\beta = c/2$, откуда $x + y = c/(2(1 + \text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta)) + c/(2(1 + \text{ctg}\alpha\cdot\text{ctg}\beta)) = c/2 = a + b$.



<u>2-е доказательство</u>. Пусть $\angle BAC = \alpha$, а $\angle DUA > \alpha$. Отметим на AB точку K так, что $AD = KD$. Тогда $\angle AKD = \angle ACU = \alpha$, поэтому четырехугольник DUKC – вписанный. Так как и четырехугольник DCEU – вписанный, то точки D, U, K, E, C расположены на одной окружности и $\angle DKE = 90°$. Тогда $BE = KE$. В равнобедренных треугольниках ADK и BEK высоты DF и EG – медианы, $AF = FK$, $BG = BK$. Значит, $FK + GK = AB/2$.

9.5. Можно изменить порядок следования чисел 1, 2, 3, 4 , расставив их, например, так: 4, 1, 3, 2 . Найдите все такие натуральные числа $n \geq 2$, для которых существуют расстановки $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$ чисел 1, 2, 3, … , n такие, что попарные суммы $a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \ldots, a_n+b_n$ образуют ряд последовательных натуральных чисел.

<u>Ответ</u>: это возможно тогда и только тогда, когда n нечётно.

<u>1-е доказательство</u>.

<u>Оценка</u>. Пусть $a_1+b_1 = k$, $a_2+b_2 = k+1, \ldots, a_n+b_n = k+n-1$. Тогда $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots \ldots+(a_n+b_n) = nk+n(n-1)/2$. С другой стороны, $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots\ldots+(a_n+b_n) = 2(1+2+\ldots+n) = n(n+1)$. Из равенства $nk+n(n-1)/2 = n(n+1)$ получаем $k = (n+3)/2$ и, следовательно, n нечётно.

<u>Пример</u>. При любом нечётном n складывая почленно последовательности 1, (k+2), 2, (k+3), … … , 2k, k, (2k+1), (k+1) и (k+1), 1, (k+2), 2, … , (k-1), 2k, k, (2k+1) , получаем следующий ряд последовательных натуральных чисел: (k+2), (k+3), (k+4), (k+5), … , (3k-1), 3k, (3k+1), (3k+2) .

<u>2-е доказательство</u>. Пусть $a_k + b_k = c_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Запишем последовательность $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в виде $t - s, t - s + 1, \ldots, t + s$ при нечетном n и $t - s, t - s + 1, \ldots, t + s - 1$ при четном n . В первом случае сумма всех элементов равна $(2s + 1)t = n(n + 1)$. Тогда последовательность начинается с числа $n + 1 - (n - 1)/2 = 1 + (n + 1)/2$ и заканчивается числом $n + 1 + (n - 1)/2 = (n + 1)/2 + n$. Элементы такой последовательности можно получить из чисел $a_k = b_k = k$ следующим образом: $c_1 = a_1 + b_{(n+1)/2}$, $c_2 = a_{(n+3)/2} + b_1$, $c_3 = a_2 + b_{(n+3)/2}$, $c_4 = a_{(n+5)/2} + b_2$, …, $c_{n-1} = a_n + b_{(n-1)/2}$, $c_n = a_{(n+1)/2} + b_n$. При четном n сумма элементов последовательности c_k равна $s(2t - 1) = n(n + 1)$, где $n = 2s$. Тогда $2t - 1 = 4s + 2$. Это уравнение не имеет решений в целых числах.

<u>Комментарии</u>. Только верный ответ – <u>0 баллов</u>. Только верный пример – <u>3 балла</u>. Только верная оценка – <u>4 балла</u>.