Решения заданий муниципального этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2023-2024 учебный год, 9 КЛАСС

Максимальное количество 35 баллов

9.1. В ряду: 2023, 202023, 20202023, и т.д. (каждое следующее число образовано дописыванием числа 20 к предыдущему слева). Может ли встретиться в этом ряду 4 простых числа подряд?

Решение:

Сумма цифр любого такого числа является нечётной, так как содержит только одно нечётное слагаемое. Также сумма цифр каждого следующего числа отличается на 2, значит, все суммы будут последовательными нечётными.

Среди трёх последовательных нечётных чисел хотя бы одно делится на 3. В противном случае у двух из них будут совпадать остатки при делении на 3 и разность между ними не больше 4, то есть ровно 3. Разность между двумя нечётными числами не может быть нечётной. Получаем, что среди трёх подряд чисел будет хотя бы одно составное, а среди четырёх – тем более.

Ответ: Нет, не может.

Критерии	*баллы*
1. Полное решение задачи.	7
2. Не объяснено, почему среди трёх последовательных нечётных чисел хотя бы одно составное. В остальном - верно.	6
3. Замечено, что все числа – последовательные нечётные, без дальнейших продвижений.	2
4. Замечено, что все числа – нечётные, без дальнейших продвижений.	1
5. Только верный ответ.	0
6. Неверное решение или его отсутствие.	0

9.2. Имеется 2 квадратных трёхчлена $ax^2 + x + b$ и $cx^2 + x + d$, где a, b, c, d - ненулевые. Корни первого из них – c и d, а корни второго – a и b. Найдите возможные значения a, b, c, d.

Решение:

По теореме Виета для первого трёхчлена: $\begin{cases} \frac{1}{a} = -(c+d) \\ \frac{b}{a} = cd \end{cases}$, для второго: $\begin{cases} \frac{1}{c} = -(a+b) \\ \frac{d}{c} = ab \end{cases}$. Пользуясь вторыми уравнениями в системах, получаем $\frac{d}{b} = ac = \frac{b}{d}$, откуда $b = -d$, $\frac{1}{a} = -c$ или $b = d$, $\frac{1}{a} = c$.

1) $\frac{1}{a} = -(c+d) = -c$, значит $d = 0$, что противоречит условию.

2) $\frac{1}{a} = -(c+d) = -c-d = -c-b = c$, откуда $b = -2c$. Аналогично определяем, что $d = -2a$. Оба трёхчлена можно представить в виде $ax^2 + x - 2a$ или $a(x-a)(x+2a)$. Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$ax^2 + x - 2a = ax^2 + a^2x - 2a^3$.

$\begin{cases} a^2 = 1 \\ -2a = -2a^3 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1$.

Ответ: $a = 1, b = -2, c = 1, d = -2$ или $a = -1, b = 2, c = -1, d = 2$.

Критерии	*баллы*
1. Полное решение задачи.	7
2. Доказано соотношение $\frac{d}{b} = ac = \frac{b}{d}$, но не рассмотрен случай $\frac{d}{b} = -1$. В остальном – верно.	5
3. Определено, что коэффициенты трёхчленов совпадут и определено, что $b = -2a$.	3
4. Определено, что коэффициенты трёхчленов совпадут.	2
5. Верно определены искомые значения, без доказательства, что других нет.	1
6. Неверное решение.	0

9.3. Содержимое коробки составляло k% от веса посылки. После того, как из коробки вынули часть содержимого, оно стало составлять 25% веса посылки. Какую часть содержимого вынули?

Решение:

Пусть p – вес посылки, y – вес изъятого содержимого.

	Вес содержимого	Вес коробки	Вес посылки
До изъятия	$\frac{kp}{100}$	$\left(1 - \frac{k}{100}\right)p$	p
После изъятия	$\frac{kp}{100} - y$	$\left(1 - \frac{k}{100}\right)p$	$p - y$

$$\frac{kp}{100} - y = 0.25(p-y) \quad \Rightarrow \quad p\left(\frac{k}{100} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{k-25}{75}p$$

Получив соотношение изъятого содержимого к начальному весу посылки, найдём искомое соотношение:

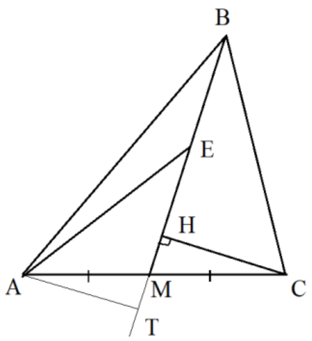
$$y:\frac{kp}{100}=\frac{k-25}{75}p:\frac{kp}{100}=\frac{4(k-25)}{3k}$$

Ответ: $\frac{4(k-25)}{3k}$.

Критерии	баллы
1. Полное решение задачи.	7
2. Верно определено отношение изъятого содержимого к весу посылки.	4
3. Допущены арифметические или алгебраические ошибки, после исправления которых, решение становится верным.	3
4. Допущены арифметические или алгебраические ошибки, после исправления, которых часть решения становится верным.	1
5. Рассмотрение частных случаев.	0
6. Неверное решение.	0

9.4. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена медиана BM. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного на отрезок BM из точки C. На отрезке BM выбрали точку E так, что $BE=2HM$. Докажите, что $\angle AEM=\angle CBM$.

Решение:



На продолжении прямой BM за точку M отметим точку T такую, что $MT=HM$. Таким образом получим, что $BE=HT$ и $ET=EH+HT=EH+BE=BH$.

Диагонали четырёхугольника $AHCT$ точкой пересечения делятся пополам, откуда следует, что он – параллелограмм(*также это можно обосновать равенством треугольников AMT и CHM)*. Откуда $AT=HC$ и $\angle ATM=\angle BHC$.

Треугольники ATE и BHC равны между собой по двум сторонам и углу между ними. ($ET=BH,\ AT=HC$ и $\angle ATM=\angle BHC$). Значит и соответствующие углы равны: $\angle AEM=\angle CBM$, что и требовалось доказать.

Критерии	*баллы*
Полное решение задачи.	7
Сделано корректное дополнительное построение и доказано, что $AHCT$ – параллелограмм. Аналогичные продвижения.	4

Сделаны дополнительные построения, способные привести к решению задачи, других продвижений нет.	1
Неверное решение.	0

9.5. На плоскости покрашено 7 произвольных точек в 3 цвета, какое наибольшее количество треугольников с вершинами, попарно различных цветов, в этих точках можно получить?

Решение:

Рассмотрим цвет, представленный наибольшим количеством точек и, для определённости, назовём его красным. Количество красных точек не менее 3 (так как среднее количество точек на цвет $2\frac{1}{3}$) и не более 5 (так как точек на остальные цвета не хватит).

1)Если красных точек 3, то остальных – 4 (3 одного цвета и 1 – другого, либо 2 одного цвета и 2 – другого). Количество треугольников: $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$, либо $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

2)Если красных точек 4, то остальных – 3 (2 одного цвета и 1 – другого). Количество треугольников: $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$.

3) Если красных точек 5, то остальных – 3 (1 одного цвета и 1 – другого). Количество треугольников: $5 \cdot 1 \cdot 1 = 5$.

Ответ: 12 треугольников.

Критерии	*баллы*
Полное решение задачи.	7
Корректно рассмотрены все случаи, верно посчитаны треугольники для каждого. Не обосновано, почему других случаев раскраски нет.	5
Корректно рассмотрены все случаи, есть ошибки в подсчёте треугольников.	3
Получен верный ответ, рассмотрена верная раскраска. Другие случаи рассмотрены не полностью.	2
Получен верный ответ, рассмотрена верная раскраска. Другие случаи не рассмотрены.	1
Неверное решение.	0