Критерии и ключи проверки муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников в Республике Карелия в 2023–2024 учебном году по математике 9 класс

№1 (7 баллов). На доске представлен комплект из 2023 чисел такой, что при замене каждого числа в комплекте суммой остальных чисел получается такой же комплект (возможно, с другим порядком чисел). Найдите произведение всех чисел данного комплекта.

Ответ. 0.

Решение. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ – данный комплект чисел, а S – их сумма. По условию для каждого числа a_i из комплекта число $S - a_i$ также принадлежит этому комплекту. Следовательно, $(S – a_1) + (S – a_2) + \ldots +(S – a_{2023}) = S$, откуда $2023S – S = S$, следовательно, $S = 0$. Последнее означает, что для каждого числа из комплекта противоположное ему число тоже принадлежит этому комплекту. Но так как в комплекте нечетное число чисел, то одно из них является противоположным самому себе, то есть число 0 принадлежит комплекту. Следовательно, произведение всех чисел данного комплекта равно 0.

Критерии:

- Верно составлена математическая модель задачи, но либо дальнейшее решение отсутствует, либо в решении имеются ошибки – 4 балла
- Полное решение – 7 баллов.

№2 (7 баллов). Маша и Даша играют в следующую игру: на доске в ряд записаны числа от 1 до 99. Девочки ставят знаки «+» (сложить) или «×» (умножить) перед любым числом (начиная со второго), перед которым знак еще не стоит. Они делают это по очереди, но известно, что первый ход делает Маша. После того, как все знаки расставлены, девочки вычисляют значение полученного выражения. Если результат является нечётным числом, то выигрывает Маша и Даша отдает ей шоколадку, а если чётным – выигрывает Даша и Маша отдает ей шоколадку. Сможет ли Даша получить шоколадку от Маши независимо от ее действий?

Ответ: Да, может.

Решение. Для достижения успеха Даша может пользоваться симметричной стратегией: если Маша ставит какой-то знак между числами *к* и *к + 1*, то Даша ставит такой же знак между числами *99 - к* и *100 - к*. Выражение, которое получится в конце игры, будет содержать несколько слагаемых – произведений, причём слагаемое, содержащее число 50, является чётным, а остальные слагаемые разобьются на пары «симметричных» слагаемых одинаковой чётности. Таким образом, выражение, полученное в конце игры, окажется чётным.

Критерии:

- Приведен только верный ответ или ответ, сопровожденный неверными рассуждениями – 0 баллов.
- Определена симметричная стратегия, но дальнейшие рассуждения ошибочны – 4-5 баллов.
- Полное решение – 7 баллов.

№3 (7 баллов). Найдите сумму квадратов корней уравнения:
$(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)+3=0$.

Ответ: сумма квадратов корней равна 18.

*Решение***.** Представим данное уравнение в виде квадратного $t^2-5t+3=0$ (1), где $t=x^2+2x$.

Уравнение (1) имеет два положительных корня t_1 и t_2, причем $t_1+t_2=5$, а $t_1\cdot t_2=3$.

Для нахождения корней данного уравнение рассмотрим два равенства:

$x^2+2x-t_1=0$ (2),

$x^2+2x-t_2=0$ (3).

По теореме Виета $x_{11}+x_{12}=-2,\ x_{11}\cdot x_{12}=-t_1,$ и $x_{21}+x_{22}=-2,\ x_{21}\cdot x_{22}=-t_2$, где через x_{11},x_{12} обозначены корни уравнения (2), а через x_{21},x_{22} - уравнения (3).

Тогда $x_{11}^2+x_{12}^2=(x_{11}+x_{12})^2-2x_{11}x_{12}=4+2t_1,$ а $x_{21}^2+x_{22}^2=4+2t_2$.

$x_{11}^2+x_{12}^2+x_{21}^2+x_{22}^2=8+2(t_1+t_2)$.

Получается: $x_{11}^2+x_{12}^2+x_{21}^2+x_{22}^2=8+10=18$.

*Ответ***:** сумма квадратов корней равна 18.

Критерии:

- Приведен только верный ответ – 0 баллов.
- Решение задачи имеет частичное продвижение – 2-4 балла.
- Полное решение – 7 баллов.

№4 (7 баллов). В треугольнике *ABC* проведена медиана *AM*. Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник *ABM*, быть в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник *ACM*?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть r_1 – радиус вписанной окружности в треугольник *ABM*, r_2 – радиус вписанной окружности в треугольник *ACM.* Предположим, что указанное в условии соотношение между r_1 и r_2 имеет место.

Тогда, учитывая, что треугольники ABM и ACM имеют одинаковую площадь, из формулы $S = p \cdot r$ получим:

$(AB + BM + MA) \cdot 2\, r_2 = (AC + CM + MA) \cdot r_2$.

То есть периметр треугольника ACM в два раза больше периметра треугольника ABM: $AC + CM + MA = 2(AB + BM + MA)$. Откуда: $AC = BM + MA + 2AB$.

Учитывая равенство $BM = MC$ (AM – медиана), имеем: $AC = CM + MA + 2AB$. Согласно неравенству треугольника ACM ($CM + MA > AC$) получаем противоречие. Значит, радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, не может быть в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ACM.

Критерии:

- Исходя из предположения о верности соотношения между радиусами r_1 и r_2, установлено, что периметр треугольника ACM в два раза больше периметра треугольника ABM – 3 балла.
- Полное решение – 7 баллов.

Максимальный балл за все выполненные задания — 28.