

Математика 2023-24

9 класс

Решения задач

1. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 - y^2 = 2023$.

Решение.

Уравнение можно записать в виде $(x-y)(x+y) = 7 \cdot 17 \cdot 17$. Тогда, так как при натуральных x и y всегда $x-y < x+y$, то возможные случаи:

$$x-y=1, x+y=2023$$

$$x-y=7, x+y=289$$

$$x-y=17, x+y=119$$

Откуда получаем пары (1012, 1011), (148, 141), (68, 51)

Ответ: (1012, 1011), (148, 141), (68, 51).

Указания. Верное решение – 7 баллов. Подбором найдены все или часть решений, без доказательства, что других решений нет – 1 балл. При наличии верных решений, если указаны решения, содержащие отрицательные значения переменных, – минус 1 балл.

2. Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне и является биссектрисой одного из углов трапеции. Найдите отношение длин оснований трапеции.

Решение.

Пусть $ABCD$ – данная трапеция, $BC \parallel AD$, $BC < AD$, $AC \perp CD$, $\angle DAC = \angle BAC$.

Опустим из вершины B перпендикуляр BK к AC .

Так как $BC \parallel AD$, то $\angle DAC = \angle BCA$, а значит $\triangle ABC$ – равнобедренный, тогда высота BK является и медианой, то есть $AK = KC$.

$\triangle BCK$ подобен $\triangle DCA$ по двум углам, тогда $BC:AD = CK:AC = 1:2$.

Ответ: длины оснований отличаются в два раза.

Указания. Можно использовать не подобие треугольников, а теорему Фалеса, свойства параллелограмма.

Верное решение – 7 баллов. Доказали, что высота из вершины B на диагональ является медианой – 2 балла.

3. Найдите площадь четырехугольника, все вершины которого имеют целочисленные координаты, удовлетворяющие условию $x^2 + y^2 = 8y - 6x - 24$.

Решение. Преобразуем уравнение: $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 1$. Множество точек, заданного уравнения – окружность с центром $(-3; 4)$ и радиусом 1. Точки с целыми координатами на окружности – только $(-2; 4)$, $(-3; 4)$, $(-3; 5)$, $(-3; 3)$.

Тогда $S = 0,5d_1d_2 = 0,5 \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

Ответ: 2

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ – 0 баллов. Подбором правильно найдены четыре точки и площадь – 2 балла. Найдена окружность – 4 балла.

4. На стене висят двое часов. Первые часы идут вперед на одну минуту в каждый час. Вторые часы отстают от первых на одну минуту в час. В полдень на первых и вторых часах поставили точное время. Какое время будут показывать вторые часы через сутки?

Решение.

За 1 ч первые часы убегают на 1 минуту. Значит, скорость первых часов составляет от скорости точных часов $61/60$. Скорость вторых часов составляет $59/60$ скорости первых часов, а тогда по сравнению с точными $61/60 * 59/60 = 3599/3600$ – то есть за 1 час вторые часы отстают от точного времени на одну секунду. Таким образом, ровно через сутки по точным часам вторые часы будут показывать 11 ч 59 мин 36 с.

Ответ: 11 ч 59 мин 36 с.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ – 0 баллов. В решении при правильном ответе присутствуют несущественные неточности, или изложение решения слишком краткое, мало обоснованное - 4-6 баллов.

5. Крокодил Гена и Чебурашка играют в следующую игру. Есть кучка камней. Чебурашка каждым своим ходом берет либо 1, либо 5 камней. Гена каждым своим ходом берёт x или y камней. Ходят по очереди, начинает Чебурашка. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Какие значения должны принимать x и y , чтобы при любом начальном количестве камней, при любой игре Гены Чебурашка всегда мог бы играть так, чтобы выиграть?

Решение.

1) Пусть $x \leq y$ и $x < 4$. При исходной кучке из $x + 1$ камня, Чебурашка вынужден будет первым ходом взять 1 камень ($x + 1 < 5$), после чего Гена возьмет x камней и выиграет. Противоречие.

2) Пусть $x \geq 4$ и $y = x + 4$. Снова при исходной кучке из $y + 1 = x + 5$ камней Чебурашка проигрывает, так как, если он возьмет 1 камень, то останется y камней, если он возьмет 5 камней, то останется x камней; в любом случае выиграет Гена.

3) Докажем, что при остальных значениях x и y Чебурашка выигрывает. Покажем, что при любом количестве камней в куче Чебурашка может сделать ход так, чтобы в куче осталось число камней, отличное и от x , и от y .

Пусть в куче k камней и ход Чебурашки. Если $k \leq 5$, то Чебурашка выигрывает одним ходом (беря 5 камней, если $k = 5$, или 1 камень, если $k \leq 4$).

Пусть $k > 5$. Чебурашка может оставить в куче либо $k - 1$ камень, либо $k - 5$ камней. Если бы в одном случае осталось x камней, а в другом – y камней, то $|x - y| = |k - 5 - k + 1| = 4$. Противоречие (см. пункт 2). Число камней в куче будет уменьшаться, и в итоге Чебурашка выиграет.

Ответ: $x, y \geq 4$ и $|x - y| \neq 4$.

Указания. Верное решение – 7 баллов. Только ответ - 0 баллов. Рассмотрены частные случаи чисел x и y - 0 баллов. Показаны противоречия случаев 1 или 2, но нет доказательства, что все остальные значения x и y подходят (пункт 3) - 1 и 2 балла соответственно. В решении присутствуют несущественные неточности, или изложение решения слишком краткое, мало обоснованное - 4-6 баллов.