РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП

2023

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАССА

Задача 1. *Найдите такое четырехзначное натуральное число n, что для записи всех трех четырехзначных чисел n, n+1 и n+2 достаточно трех различных цифр.*

Ответ. Например, 1111, 1112, 1113 или 9988, 9989, 9990. Есть и другие примеры.

• За любой верный пример — *7 баллов*.

Задача 2. *На своем дне рождения профессор сказал: «Если вы сложите год моего рождения с нынешним, затем вычтете год моего 10-го дня рождения и год моего 50-го дня рождения, а затем добавите мой возраст, то получите 80.» Сколько лет профессору?*

Ответ. 70 лет. ***Решение.*** Пусть профессор родился в y-ом году и ему x лет. Тогда номер нынешнего года — $y+x$, а номера лет 10-го и 50-го дней рождения — $y+10$ и $y+50$ соответственно. По условию $y+(y+x)–(y+10)–(y+50)+x = 80 \Leftrightarrow 2x–60 = 80 \Leftrightarrow x = 70$.

• За ответ без обоснования — *0 баллов*.

Задача 3. *Мотоциклист был в пути три часа. Его средняя скорость в первые два часа равнялась 50 км/ч и в последние два часа — тоже 50 км/ч. Какое наибольшее расстояние он мог преодолеть?*

Ответ. 200 км. ***Решение.*** Если мотоциклист первый и третий часы пути ехал со скоростью 100 км/ч, а второй час стоял, то он преодолел 200 км, а его средняя скорость как в первые так и в последние два часа пути равнялась 100/2 = 50 км/ч. Больше 200 км он проехать не мог, так как за первые два часа проехал 100 км, и за последний час — не более 100 км, так как 100 км он проехал за последние два часа.

• За ответ без обоснования — *0 баллов*. Ответ с примером без оценки и ответ с оценкой без примера оцениваются *из 3 баллов*.

Задача 4. *Три числа таковы, что куб суммы любых двух из них равен сумме их кубов. Докажите, что среди этих чисел есть нуль.*

Решение. Обозначим наши числа через x, y и z. Пусть среди них нет нуля. По условию. $0 = (x^3+y^3)–(x+y)^3 = (x+y)(x^2–xy+y^2–(x+y)^2) = –3xy(x+y)$. Так как x и y — не нули, то $x+y = 0$, то есть $x = –y$. Аналогично доказывается, что $y = –z$ и $z = –x$. Но тогда $x = –y = –(–z) = z$ и $–z = z$, откуда $z = 0$.

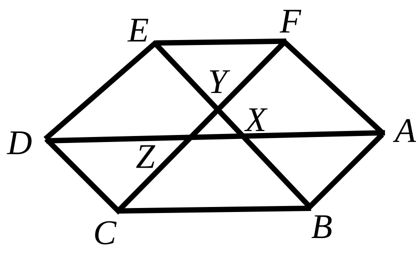
• Деление на выражение, которое может обращаться в 0, без отдельного рассмотрения случая, когда оно равно 0 — *не выше 2 баллов*.

Задача 5. *Клетки доски 5×5 покрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке так, что угловые клетки — белые. Петя и Вася (начинает Петя) по очереди ставят на пустые клетки доски фишки: Петя — на белые, Вася — на черные. При этом нельзя ставить фишку на клетку рядом с фишкой соперника. Проигрывает тот, кто не может поставить очередную фишку без нарушения правил. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя. ***Решение.*** Первым ходом Петя ставит фишку в центральную клетку доски. После этого Вася может ходить только на черные клетки, находящиеся в четырех квадратах 2×2, расположенных в углах доски. Вторым и третьим ходом Петя должен поставить по фишке в любые два из этих квадратов (что, очевидно, возможно). Вася при такой игре Пети сможет сделать только четыре хода в два оставшихся квадрата, а Петя может сделать еще по одному ходу в каждый из занятых им квадратов, и выиграть на пятом ходу.

Задача 6. *Шестиугольник ABCDEF, все углы которого меньше 180 градусов, таков, что каждый треугольник, образованный тремя идущими подряд его вершинами, имеет площадь 1. Докажите, что площадь шестиугольника не меньше 6.*

Решение. Так как площади треугольников ABC и BCD по условию равны, то равны и высоты, опущенные на их общее основание BC. Поскольку все углы шестиугольника меньше 180 градусов, вершины B и C лежат с одной стороны от прямой AD. Поэтому прямые BC и AD параллельны. Аналогично, $EF \parallel AD$, $CD \parallel BE \parallel AF$, $AB \parallel CF \parallel DE$.



Пусть диагонали AD и BE пересекаются в точке X, диагонали BE и CF — в точке Y, диагонали CF и AD — в точке Z. С точностью до выбора обозначений можно считать, что точка X принадлежит трапеции $ABCF$ (см. рисунок). Тогда наш шестиугольник можно разбить на параллелограммы $ABCZ$, $AFEX$, $EDCY$ и треугольник XYZ (который может выродиться в точку). Площадь каждого из трех перечисленных параллелограммов равна 2, так как половину каждого из них составляет один из треугольников, площадь которого по условию равна 1 (например, для параллелограмма $ABCZ$ это треугольник ABC). Площадь шестиугольника не меньше суммы площадей этих параллелограммов, откуда и вытекает утверждение задачи.

• Доказана только параллельность противоположных сторон шестиугольника — *2 балла*. Тот факт, что точки B и C лежат с одной стороны от прямой AD и аналогичные факты используются без объяснения — *не снижать оценку*.