ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

(Муниципальный этап)

9 класс

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Необходимо учитывать следующее:

1) По всем заданиям начисление баллов производится целым, а не дробным числом;
2) Любое правильное решение оценивается в 7 баллов;
3) Общий результат по итогам муниципального этапа оценивается путем сложения баллов, полученных участником за каждую задачу;
4) Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее **правильности и полноты**;
5) Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;
6) Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

9.1. В шахматном фестивале участвовали англичане, немцы и французы. Каждый англичанин сыграл ровно с пятью немцами и двумя французами, каждый немец – с шестью англичанами и четырьмя французами, а каждый француз – с тремя англичанами и с одинаковым числом немцев. Найдите это число.

Ответ: 5.

Решение: Пусть в фестивале участвовало $\boldsymbol{x}$ англичан, $\boldsymbol{y}$ немцев и $\boldsymbol{z}$ французов. Тогда англичане сыграли $5\boldsymbol{x}$ партий с немцами и $2\boldsymbol{x}$ партий с французами, немцы сыграли $6\boldsymbol{y}$ партий с англичанами и $4\boldsymbol{y}$ партий с французами, а французы – $3\boldsymbol{z}$ партий с англичанами и $\boldsymbol{kz}$ партий с немцами, где $\boldsymbol{k}$ - искомое число. Значит, должны выполняться равенства: $5x = 6y$, $2x = 3z$ и $4y = kz$. Следовательно, $k = \frac{4y}{z} = 4 \cdot \frac{\frac{5}{6}x}{\frac{2}{3}x} = 5$

9.2. Корни уравнения $x^2 + ax + 1 = b$ – целые числа, отличные от нуля. Докажите, что число $a^2 + b^2$ является составным.

Решение: Пусть x_1 и x_2 – корни трехчлена.

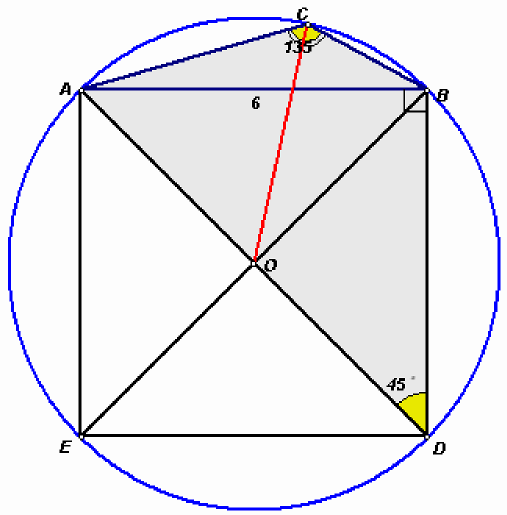
Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a,\ \ x_1x_2 = 1 - b.$

Поэтому $a^2 + b^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2 + 1 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$. При ненулевых значениях x_1, x_2 это равенство дает разложение числа $a^2 + b^2$ на множители, отличные от 1.

Комментарий. Не показано, что множители больше 1 – не более 5 баллов.

9.3. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 135°. На стороне *AB* вне треугольника построен квадрат с центром *O*. Найдите *OC*, если *AB* = 6.

Решение. Пусть *ABDE* – построенный квадрат. Его диагональ образует со стороной угол 45°, значит, ∠*ACB* + ∠*ADB* = 180° (см. рис.). Следовательно, около четырёхугольника *ACBD* можно описать окружность. Так как угол *ABD*, вписанный в эту окружность, прямой, то центр *O* окружности является серединой диагонали *AD* квадрата, то есть его центром. Тогда *OC* – радиус этой окружности. Таким образом, $OC = \frac{1}{2}AD = 3\sqrt{2}$



Комментарий. Доказано равенство углов QOP и QAP – 3 балла. Доказано, что точки A, O, Q, P лежат на одной окружности – 4 балла.

9.4. Отличница Маша хочет выписать два нуля, две единицы, две двойки, …, две девятки в ряд так, чтобы нули стояли рядом, между единицами стояла одна цифра, между двойками – 2 цифры, …, между девятками – 9 цифр. Докажите, что у нее это не получится.

Решение: Пусть Маша записывает числа в клетки прямоугольника 1x20. Покрасим клетки этого прямоугольника в шахматном порядке. Получим 10 черных и 10 белых клеток. Клетки, между которыми нечетное число клеток, покрашены в один цвет, а клетки, между которыми четное число клеток, - в разные цвета.

Назовем пару одинаковых цифр одноцветной, если обе цифры записаны в клетки одинакового цвета. В противном случае назовем эту пару разноцветной.

Допустим, что у Маши получится. Тогда цифры пары (0, 0), (2, 2), (4, 4), (6, 6), (8, 8) будут разноцветными, а остальные пары – одноцветными. Значит, клеток каждого цвета должно быть нечетное количество – пять от разноцветных пар и четное число от одноцветных. Но в прямоугольнике клеток каждого цвета по десять. Полученное противоречие показывает, что Маша не сможет выписать цифры требуемым образом.

9.5. В соревнованиях лыжников оказалось, что стартовый номер лыжника в сумме с занятым им местом равен либо 97, либо 96, либо 95. Причем, все эти числа: 97, 96 или 95 хотя бы один раз встретились. Сколько лыжников участвовало в соревнованиях?

Ответ: 95.

Решение. *Оценка*.

Первый случай. Стартовало не более 96 лыжников, иначе номер стартовавшего последним в сумме с номером места будет больше 97.

Второй случай. Стартовало не менее 94, иначе номер стартовавшего первым в сумме с номером места будет меньше 95.

Третий случай. Пусть стартовало 96 лыжников. Пусть первый занял место m_1, второй m_2, …, девяносто шестой место m_{96}. Ясно, что $m_1 + 1 \leq 97,\ m_2 + 2 \leq 97$, …, $m_{96} + 96 \leq 97$. Сложив, получим, $m_1 + m_2 + \cdots + m_{96} + 1 + 2 + \cdots + 96 \leq 97 \cdot 96$, или $2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 96) \leq 96 \cdot 97$. Поскольку в последнем неравенстве на самом деле равенство, то оно было и во всех других неравенствах, и сумма номера и места была равна только 97. Что невозможно.

Четвертый случай. Пусть стартовало 94 лыжника. Пусть первый занял место m_1, второй m_2, …, девяносто четвертый место m_{94}. Ясно, что $m_1 + 1 \geq 95,\ m_2 + 2 \geq 95$, …, $m_{94} + 94 \geq 95$. Сложив, получим, $m_1 + m_2 + \cdots + m_{94} + 1 + 2 + \cdots + 94 \geq 95 \cdot 94$, или $2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 94) \leq 95 \cdot 94$. Поскольку в последнем неравенстве на самом деле равенство, то оно было и во всех других неравенствах, и сумма номера и места была равна только 95. Что невозможно.

Значит, лыжников могло стартовать только 95.

Пример. Построим следующий пример. Первое слагаемое в каждой сумме – это стартовый номер: 1+95=96, 2+94=96, …, 47+49=96, 48+47=95, 49+48=97, 50+46=96, 51+45=96, …, 95+1=96.

Комментарий. Дан правильный ответ без обоснования – 0 баллов. Верно получена оценка (без примера) – 4 балла, верно построен пример (без оценки) – 2 балла.