9 класс

1. Дано число n. В нём вычеркнули какую-то цифру и получили число, которое ровно на 2023 меньше n. Каким могло быть n?
   Ответ: 2247.
   Решение: Если вычеркнули не последнюю цифру, то разница между числами будет делиться на 10 => вычеркнули последнюю. Тогда наше число можно представить в виде $n=10a+b$ (где b – последняя цифра числа), а после вычёркивания полученное число будет $m=a$.
   Разность $n - m = 9a+b = 2023$. Так как $b<10$ и 2023 имеет остаток 7 при делении на 9, то $b=7$ => $a=224$.

2. Вася посетил математический турнир и рассказал, что там было 102 участника, и каждому из них среди остальных участников были знакомы ровно один мальчик и ровно одна девочка (знакомства взаимны). Докажите, что Вася что-то напутал.
   Решение. Допустим, что Вася ничего не напутал. Всех мальчиков можно разбить на пары знакомых, следовательно мальчиков четное число. Аналогично девочек четное число. Так же всех детей можно разбить на пары знакомых мальчик-девочка, то есть девочек и мальчиков поровну. Но 102:2=51. Противоречие.
3. Дан треугольник ABC. На сторонах *AB* и *BC* соответственно отметили точки *D* и *E* такие, что отрезок *DE* параллелен отрезку *AC*. *AE* и *DC* пересекаются в точке F. Оказалось, что $AD = AF$ и $DE = EC$. Докажите, что $DB = AE$.
   Решение. Пусть $\angle ADF = \angle AFD = \angle EFC = \alpha$, $\angle EDC = \angle ECD = \angle ACF = \beta$.
   В треугольниках *DCA* и *FCE* две пары соответственно равных углов, поэтому и третьи углы равны: $\angle CAD = \angle CEF = \angle AEC$. Заметим, что $\angle EDB = \angle CAD$ и $\angle ACE = \angle DEB$. Значит, треугольники *AEC* и *BDE* равны по стороне и двум углам. Следовательно, $AE = DB$.
4. Петя написал на доске число N. Вовочка, увидев это число, заметил, что оно делится на все числа от 1 до 200, кроме каких-то двух, причем эти два числа являются последовательными. Чему могут быть равны эти два последовательных числа? (Приведите все варианты и докажите, что других нет)
   Ответ: 127 и 128.
   Решение. Если число N не делится на число $1<d<101$, то оно так же не делится на число $2*d$, но числа d и $2*d$ не являются последовательными (так как $d>1$). Значит N делится на все числа от 1 до 100. Тогда N точно делится на все четные (кроме 128) числа от 100 до 200, так как любое такое четное число можно представить в виде произведения нечетного числа меньше 100 и степени двойки, причем степень двойки не больше 6. А так как среди двух последовательных чисел одно четное, значит N не делится на 128. Так как $129=3*43$, то N делится на 129. Значит, единственный вариант – это 127 и 128. Число N могло например, равняться произведению всех простых (кроме 127) чисел меньших 200, в шестой степени.
5. Перед Экспертом и Судьей лежат неотличимые на вид монеты массами 1, 2, 4, 5, 6, 8. Эксперт знает, где и какая монета находится, а Судья этого не знает (но Судье известен набор весов монет, то есть он знает, что это монеты массами 1, 2, 4, 5, 6 и 8). За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах Эксперт сможет продемонстрировать Судье веса всех монет?
   Ответ: за 2.
   Решение. За одно взвешивание этого сделать нельзя, так как либо в одной чаше окажется не менее двух монет (и тогда какая из них есть какая нельзя будет сказать), либо невзвешенных монет будет не менее двух.
   Покажем, как установить веса всех монет за два взвешивания.
   Первое взвешивание: $1+2+4 < 8$. Так как только 8 тяжелее трех монет, и только если это 1, 2 и 4, то мы установили, что на левой чаше лежат монеты 1,2 и 4, на правой 8, не взвешенные – 5 и 6.
   Второе взвешивание $8+1 < 6+4$. Если бы мы к 8 с левой чаши добавили не 1, то масса была бы минимум 10. А если взять монету с левой чаши и одну из невзвешенных, то максимум это было бы $6+4=10$. Значит с монетой 8 лежит 1. Тогда на правой чаше именно 6 и 4, так как любые две другие монеты в сумме максимум $5+4=9$.