Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2023/24 уч.г.
Математика, 9 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

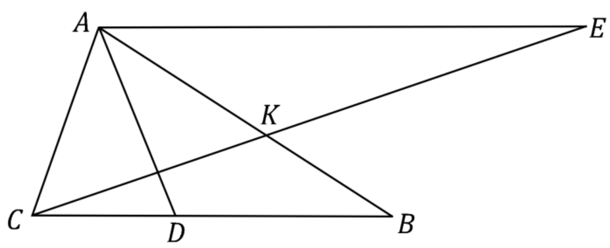
Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

9.1. Стёпе надо наполнить на даче водой две бочки ёмкостью 120 и 200 литров. У него есть два шланга разного диаметра, вода из них бежит с разной скоростью. Стёпа поместил по шлангу в бочку, а когда бочка ёмкостью 120 литров наполнилась наполовину, поменял шланги местами. Бочки наполнились одновременно. Во сколько раз больше скорость поступления воды из широкого шланга, чем из узкого?
Ответ. 3.
Решение. Пусть из шланга, помещенного в большую бочку, вода бежит в x раз быстрее. Когда в меньшую бочку набралось 60 л воды, в большую набралось $60x$ л. После замены шлангов в меньшую бочку до наполнения набралось опять 60 л воды, а в большую в x раз меньше, т.е. $\frac{60}{x}$. Из уравнения $60x+\frac{60}{x}=200$ получаем после упрощения уравнение $3x^2-10x+3=0$, имеющее корни 3 и $\frac{1}{3}$.
Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Верно составлено уравнение, но ответ не получен – 3 балла. Ответ получен подбором чисел, удовлетворяющих условию, но не показано, что другие ответы невозможны – 2 балла. Решение верно начато, но нет существенного продвижения – 1 балл. Приведен только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.2. В остроугольном разностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Известно, что $CD=3$ и $DB=5$. Через точку C проведена прямая l, перпендикулярная AD. Через точку A проведена прямая m, параллельная BC. Точка пересечения прямых l и m обозначена E. Найдите AE.
Ответ. 12.
Решение. По свойству биссектрисы $\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$. Пусть K – точка пересечения прямых l и AB (см. рисунок). В треугольнике ACK биссектриса AD является также высотой, поэтому он равнобедренный, $AC=AK$. Отсюда $\frac{AK}{AK+KB}=\frac{3}{5}$, $\frac{KB}{AK}=\frac{2}{3}$. Треугольники AEK и CBK подобны, поэтому $\frac{KB}{AK}=\frac{BC}{AE}=\frac{2}{3}$. Таким образом, $AE=\frac{3}{2}BC=\frac{3}{2}\cdot(3+5)=12$.



Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла.*

9.3. Неотрицательные действительные числа a, b, c, d таковы, что $a+b+c \leq 1$ и $b+c+\ d \leq 1$. Какое максимальное значение может принимать величина $ac+bd$?

Ответ. $\frac{1}{4}$.

Решение. Согласно условию $ac+bd \leq \big(1-(b+c)\big)c+b\big(1-(b+c)\big)=(b+c)\big(1-(b+c)\big)$. Обозначим $b+c=x$. Очевидно, $0 \leq x \leq 1$. Для таких x величина $x(1-x)=-x^2+x \leq \frac{1}{4}$, так как парабола $y=-x^2+x$ направлена ветвями вниз и имеет вершину в точке $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$. Таким образом, $ac+bd \leq \frac{1}{4}$. Максимум достигается при значениях $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, $c=0$, $d=\frac{1}{2}$, или $a=\frac{1}{2}$, $b=0$, $c=\frac{1}{2}$, $d=0$, удовлетворяющих условиям.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. В верном решении имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы – 5-6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

9.4. У девяти детей рост $140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148$ см. Дети выстроились в ряд так, что правый сосед ребенка с ростом m имеет рост не больше $m+2$. Сколько существует способов встать в ряд?

Ответ. 4374.

Решение. Для $n=1$ число способов $S_1\ =1$, для $n=2$: $S_2=2$, для $n=3$: $S_3=6$. Рассмотрим случай $n=4$. Пусть дети с ростом $140, 141, 142$ стоят согласно правилу, тогда ребёнок с ростом 143 может встать после ребёнка с ростом 141 или 142, или первым. $S_4=6\cdot 3=18$. Аналогично, каждый раз для ребёнка с ростом k оказывается три допустимых места: после $k-1$ или $k-2$, или первым. При $n>2$ число способов каждый раз умножается на 3, $S_9=2\cdot 3^7=4374$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Найдено число способов для малых значений n – 1 балл. Замечено, что число способов каждый раз умножается на 3 – 3 балла. Последнее утверждение обосновано, но верный ответ не получен – 6 баллов. Приведен только ответ без обоснования – 0 баллов.*

9.5. Полоска разбита на 2023 клетки. Два игрока, Кирилл и Софья, по очереди закрашивают по одной клетке за раз, Кирилл в красный цвет, а Софья в синий. Каждую клетку можно закрасить только один раз, и рядом не должны находиться две клетки одного цвета. Результат считается ничьей, если закрашены все клетки; в противном случае игрок, который больше не может закрасить клетку, проигрывает. Кирилл делает первый ход. Определите исход игры, предполагая, что оба игрока используют оптимальные стратегии, и укажите эти стратегии.

Ответ. Выиграет Софья.

Решение. Поскольку полоска симметрична, будем для определённости рассматривать случай, когда Кирилл на своём первом ходу не закрасит клетку 1. Докажем, что если Софья в свой первый ход закрасит клетку 1, то она не проиграет (однако может сыграть вничью). Перед k-м ходом Софьи k клеток закрашены красным. Поскольку красные клетки не могут находиться рядом друг с другом, между ними есть $k-1$ пробел ненулевого размера. Эти пробелы могут быть заполнены синими клетками. Но синих клеток к этому моменту $k-1$, причём одна синяя клетка – первая, то есть в пробелах размещено не больше $k-2$ синих клеток, и в оставшемся свободным пробеле можно закрасить клетку синим.
Если Кирилл на своём первом ходу закрасит клетку 1, то в стратегии Софьи клетка 1 заменяется на клетку 2023. Таким образом, Софья всегда может сделать ход и не проиграет. Докажем теперь, что при длине полоски 2023 ничьей быть не может, если Софья своим первым ходом следует своей стратегии. Действительно, при ничьей закрашены все клетки, Кирилл делал первый и последний ход, значит, он закрасил клетки с нечётными номерами. Но Софья по своей стратегии своим первым ходом закрашивает клетку 1 (или, по симметрии, 2023). Противоречие. Следовательно, Софья выигрывает.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Указана стратегия Софьи – 2 балла. Обосновано, что при этой стратегии она не проиграет – 3 балла. Доказано, что не может быть ничьей – 2 балла. Баллы суммируются. Приведен только ответ без доказательства – 0 баллов.*