9-й класс

1. Докажите, что $(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) \vdots 25$.

Доказательство:

Воспользуемся методом математической индукции.

1. $n = 1 \quad 2^3 \cdot 3^1 + 5 - 4 = 24 + 1 = 25 \vdots 25$
2. $n = k \quad (2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) \vdots 25$
3. $n = k + 1 \quad (2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5k + 1) = 2^{k+2} \cdot 2 \cdot 3^k \cdot 3 + 5k + 1 =$

$= 6(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - 30k + 24 + 5k + 1 =$

$= 6(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - 25k + 25 =$

$= 6(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) + 25(1 - k) \quad \Rightarrow$

сумма кратна 25, т.к. каждое слагаемое кратно 25.

2. Решить уравнение:

$$(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$$

Решение:

Сделаем замену

$y = \frac{x+3+x+5}{2} = x + 4$

$x = y - 4$

$(y - 4 + 3)^4 + (y - 4 + 5)^4 = 16$

$(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 16$

$y^4 - 4y^3 + 4y^2 + 2y^2 - 4y + 1 + y^4 + 4y^3 +$

$+4y^2 + 2y^2 + 4y + 1 = 16$

$2y^4 + 8y^2 + 4y^2 + 2 = 16$

$2y^4 + 12y^2 - 14 = 0$

$y^4 + 6y^2 - 7 = 0$

$D = 36 + 28 = 64$

$y^2 = \frac{-6 \pm 8}{2} = \left[\begin{array}{l} -7 \\ 1 \end{array}\right.$

$y^2 = 1, \; y_1 = 1, \; y_2 = -1$

$x_1 = -3; \; x_2 = -5$

Ответ: –3; –5.

3. Утром из пункта *A* в пункт *B* отправляется по течению моторная лодка. Одновременно из пункта *B* в пункт *A* выходит катер, собственная скорость которого в 1,4 раза больше собственной скорости моторной лодки. Известно, что лодка и катер встречаются в 12 часов дня, потом лодка прибывает в пункт *B* не позже 15 часов дня, а катер прибывает в пункт *A* не раньше 15 часов дня.

Найти время отправления лодки из пункта *A* в пункт *B*, если известно, что на путь из *B* в *A* лодка затрачивает не более 9 часов, а катер на путь из *A* в *B* затрачивает не менее 4,5 часов.

Решение:

Способ 1. Пусть x км/ч – собственная скорость лодки, $1{,}4x$ км/ч собственная скорость катера и y км/ч скорость течения реки, t часов – время отправления лодки из пункта *A*

$(x+y)(12-t)$ км прошла до встречи с катером моторная лодка

$(1{,}4x-y)(12-t)$ км прошел до встречи катер.

Из условия задачи можно составить следующие соотношения:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+y)(12-t)}{1{,}4x-y} \geq 3, \\ \dfrac{(1{,}4x-y)(12-t)}{x+y} \leq 3, \\ \dfrac{AB}{x-y} \leq 9, \\ \dfrac{AB}{1{,}4x+y} \geq 4{,}5 \end{cases}$$

Из первых двух неравенств вычитанием получим неравенство:

$$\frac{(x+y)(12-y)}{1{,}4x-y} \geq \frac{(1{,}4x-y)(12-t)}{x+y}$$

Откуда $(x+y)^2 \geq (1{,}4x-y)^2$

или $x+y \geq 1{,}4x-y$, $x \leq 5y$. (1)

Из последних двух неравенств

$\dfrac{2AB}{1{,}4x+y} \geq \dfrac{AB}{x-y}$ или $2x-2y \geq 1{,}4x+y$, $x \geq 5y$. (2)

(1) и (2) выполняются одновременно, значит $x = 5y$.

$\begin{cases} 12-t \geq 3, \\ 12-t \leq 3 \end{cases}$ откуда $t = 9$.

Лодка вышла из пункта A в 9 часов утра.

Способ 2. Пусть лодка вышла в t часов из пункта A, x км/ч – собственная скорость катера, y км/ч – скорость течения реки. Скорость сближения лодки и катера $x+1{,}4x=2{,}4x$ км/ч, следовательно, $AB=2{,}4x(12-t)$ км.

Из условия задачи можно составить следующие неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{2{,}4x(12-t)}{x+y} \leq 15-t, \\ \dfrac{2{,}4x(12-t)}{1{,}4x-y} \geq 15-t \end{cases}$$

$$\frac{2{,}4x(12-t)}{x+y} \leq \frac{2{,}4x(12-t)}{1{,}4-y},$$

Откуда $x \leq 5y$ (3)

Подставляя в первое неравенство получим $t \geq 9$.

$(x-y)$ км/ч – скорость лодки при движении от B к A.

$(1{,}4x+y)$ км/ч – скорость катера вниз по течению.

Из условия задачи можно составить следующие неравенства:

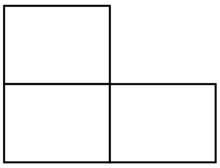
$$\begin{cases} 9(x-y) \geq AB, \quad AB = 2{,}4x(12-t), \\ 4{,}5(1{,}4x+y) \leq AB, \end{cases}$$

Откуда следует $9(x-y) \ge (1{,}4x+y)\cdot 4{,}5$ или $x \ge 5y$ (4)

(3) и (4) выполняются одновременно, следовательно, $x=5y$, а $t=9$, т.е. лодка вышла из пункта A в 9 часов утра.

Ответ: лодка вышла из пункта A в 9 часов утра.

4. Существуют ли на клетчатой бумаге прямоугольник, который можно без пересечений замостить «уголками», изображенными на рисунке



с выполнением условий

- ✓ ни в какой точке не смыкается более трех «уголков»;
- ✓ никакие два «уголка» не образуют прямоугольник 3×2 клетки?

Решение:

Предположим, что такой прямоугольник существует. Если в замощении прямоугольника какой-либо «уголок» примыкает к краю прямоугольника стороной из одной клетки, то он неизбежно должен быть дополнен другим «уголком» 3×2 до прямоугольника, что противоречит условию. Следовательно, каждый «уголок» примыкает к краю прямоугольника со сторонами из двух клеток, а прямоугольник имеет четные размеры $2l \times 2k$.

Так как каждый «уголок» имеет 6 вершин, то всего у «уголков», покрывающих прямоугольник, будет $\frac{2l\cdot 2k}{3}\cdot 6 = 8lk$ вершин.

Посчитаем количество вершин у всех «уголков» другим спросом:

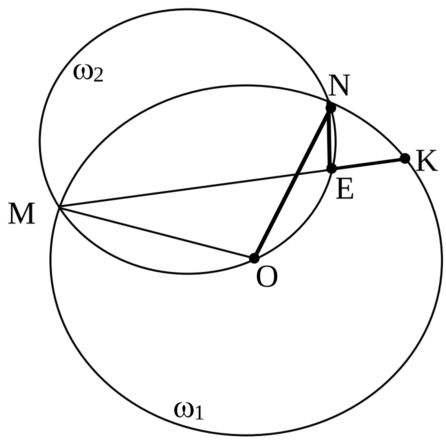
В каждом узле клетчатой бумаги внутри прямоугольника, как следует из условия задачи, смыкается не более 2 вершин, на стороне длиной $2l$ – не более $2(l-1)$ вершин, в углах прямоугольника – по 1 вершине. Всего не более

$$2(2l-1)(2k-1) + 2\cdot 2(l-1) + 2\cdot 2(k-1) + 4 = 8lk - 2 < 8lk$$

вершин.

Противоречие. Значит, прямоугольника, удовлетворяющего условию задачи, не существует.

5. Две окружности пересекаются в точках M и N (см. рис). При этом вторая окружность проходит через центр O первой окружности и некоторую точку E хорды MK первой окружности. Доказать, что NE = EK.



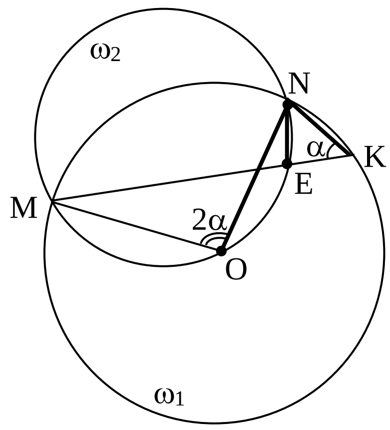
Доказательство:

1) Рассмотрим первую окружность ω_1

$\angle MKN$ – вписанный, опирается на дугу MN;

$\angle MON$ – центральный, опирается на дугу MN;

Пусть $\angle MKN = \alpha$, тогда $\angle MON = 2\alpha$



2) Рассмотрим вторую окружность ω_2

$\angle MON$ и $\angle MEN$ – вписанные, опираются на дугу MN.

Следовательно, $\angle MEN = \angle MON = 2\alpha.$

3) Рассмотрим ΔNEK

$\angle MEN$ – внешний, поэтому

$\angle MEN = \angle ENK + \angle EKN$

$2\alpha = \angle ENK + \alpha$

$\angle ENK = \alpha.$

Итак, в ΔNEK равны углы: $\angle ENK$ и $\angle EKN$. Следовательно, ΔNEK – равнобедренный, $NE = EK$.