Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2023-2024 уч.год

9 класс

Решения и ответы

1. При каких значениях b один из корней уравнения $x^2+bx+2023=0$ в семь раз больше другого?

   Решение. Пусть x_1 и x_2 корни данного уравнения. Пусть $x_2=7x_1$. Запишем теорему Виета для данного уравнения:

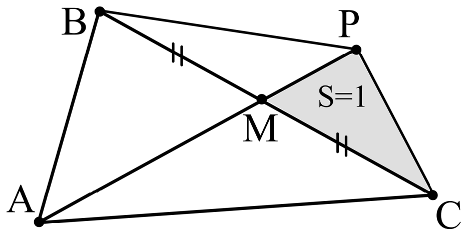
$$\begin{cases} x_1+x_2=8x_1=-b \\ x_1\cdot x_2=7x_1^2=2023 \end{cases}$$

   Из второго уравнения получаем, что $x_1^2=289$. Тогда $x_1=\pm 17$. Тогда $b=\pm 136$.

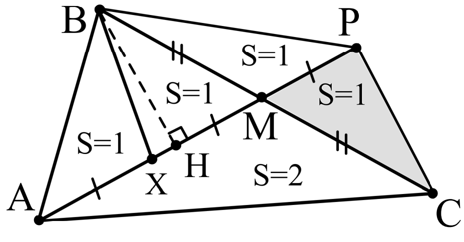
   Проверка показывает, что дискриминант этого уравнения $136^2-4\cdot 2023$ положителен.

   Ответ. $b=\pm 136$.

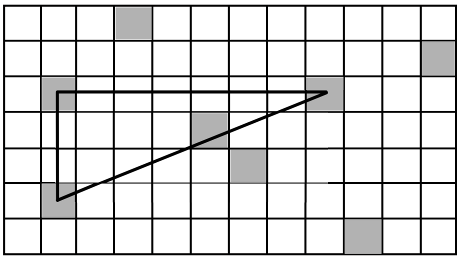
2. Точка P лежит на продолжении медианы AM треугольника ABC так, что $MP=\dfrac{1}{2}AM$. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника CMP равна 1.



   Решение. Опустим из точки B перпендикуляр BH на прямую AP (см. рис). Отметим на медиане AM ее середину X. По условию, $MP=\dfrac{1}{2}AM$, т.е. $AX=XM=MP$. BH – общая высота треугольников ABX, XBM, MBP. Получили, что площади этих треугольников равны. В треугольнике BPC отрезок PM – это медиана, а медиана делит треугольник на два треугольника равной площади. Поэтому площади треугольников BMP и CMP равны, и, по условию, они равны 1. Поэтому площадь треугольника XBM равна 1, и площадь треугольника ABM равна 2. Медиана AM делит треугольник ABC на два треугольника с одинаковой площадью, поэтому площадь треугольника ABC равна 4.

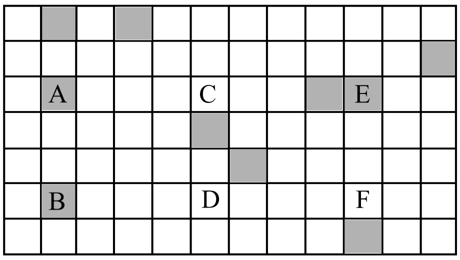


3. Клетки бесконечной клетчатой плоскости раскрашены в два цвета. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник, вершины которого расположены в центрах клеток, катеты которого паралельны линиям сетки, с длинами катетов не меньшими, чем 3 клетки, все три вершины которого раскрашены в один цвет.
Пример такого треугольника показан на рисунке.



Решение.
Первый способ. Рассмотрим произвольный вертикальный ряд. В нем бесконечное число клеток, значит, существует две клетки, окрашенные в один цвет и расположенные на расстоянии, не меньшем, чем три клетки. Назовем эти клетки A и B, а цвет, в который они окрашены, назовем первым. Рассмотрим два горизонтальных ряда, содержащие выбранные клетки A и B. Если в хотя бы в одном из этих горизонтальных рядов найдется клетка первого цвета, назовем ее C, расположенная на расстоянии 3 клетки или дальше от вертикального ряда AB, искомый треугольник найден. Если такой клетки первого цвета не найдется, значит, все клетки этих рядов (расположенные дальше, чем на 3 от вертикального ряда AB), окрашены во второй цвет, и можно выбрать две клетки в первом горизонтальном ряду и одну клетку во втором горизонтальном ряду. Получим искомый прямоугольный треугольник второго цвета.

Второй способ. Рассмотрим произвольный вертикальный ряд. В нем бесконечное число клеток, значит, существует две клетки, окрашенные в один цвет и расположенные на расстоянии, не меньшем, чем три клетки. Назовем эти клетки A и B, а цвет, в который они окрашены, назовем первым. Рассмотрим два горизонтальных ряда, содержащие выбранные клетки. В этих рядах выберем в одном вертикальном ряду справа от A и B соответственно две клетки, расположенные на расстоянии не меньше трех клеток от A и B. Назовем эти клетки C и D. Если хотя бы одна из клеток C и D окрашена в первый цвет, треугольник найден. Если обе они окрашены во второй цвет, повторим переход вправо: выберем в этих же горизонтальных рядах в каком-то вертикальном ряду две клетки, расположенные справа от C и D на расстоянии не меньше трех клеток от C и D. Назовем эти клетки E и F. Если клетка E окрашена в первый цвет, получаем прямоугольный треугольник ABE. Если клетка E окрашена во второй цвет, получаем прямоугольный треугольник CDE.



4. Существуют ли 9 таких простых чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_9$, что $p_1^2 - 1$ делится на p_2, $p_2^2 - 1$ делится на p_3, $p_3^2 - 1$ делится на p_4, и так далее, $p_8^2 - 1$ делится на p_9, $p_9^2 - 1$ делится на p_1?

   Решение. Таких чисел не существует, докажем это.
   Первый способ. Если первое число равно 2, $p_1 = 2$, тогда вычисляем $p_2 = 3$, $p_3 = 2$, $p_4 = p_6 = p_8 = 3$, $p_9 = 2$ и $p_1 = 3$. Так как рассматривается набор из нечетного числа чисел, получили противоречие.
   Далее, пусть все простые числа – нечетные. Предположим, что p_2 – самое большое из этих простых чисел, т.е. $p_1 < p_2$. (Если это не так, сдвинем нумерацию по кругу). Тогда $p_1^2 - 1 = (p_1 - 1)(p_1 + 1)$ делится на простое p_2. Значит, одна из скобок делится на p_2. Но $p_1 - 1$ меньше p_2, и не может делиться на это число. Числа p_1 и p_2 нечетные, это значит, что $p_1 + 1 < p_2$, поэтому $p_1 + 1$ не может делиться на p_2. Получили противоречие. Значит, таких простых чисел не существует.

   Второй способ. Если первое число равно 2, $p_1 = 2$, тогда вычисляем $p_2 = 3$, $p_3 = 2$, $p_4 = p_6 = p_8 = 3$, $p_9 = 2$ и $p_1 = 3$. Так как рассматривается набор из нечетного числа чисел, получили противоречие.
   Пусть все простые числа – нечетные. Предположим, что $p_1^2 - 1 = (p_1 - 1)(p_1 + 1)$ делится на простое p_2. Значит, одна из скобок делится на p_2. Если $p_1 - 1$ делится на p_2, то $p_2 \leq p_1 - 2$. Если $p_1 + 1$ делится на p_2, то таким простым делителем числа $p_1 + 1$ не могут быть ни $p_1 + 1$, ни $p_1 - 1$ (они четные), ни p_1 ($p_1 + 1$ и p_1 взаимно простые), поэтому и в этом случае $p_2 \leq p_1 - 2$. Можем перейти к строгому неравенству $p_1 > p_2$. Рассуждая последовательно, получаем цепочку неравенств

$$p_1 > p_2 > p_3 > p_4 > p_5 > p_6 > p_7 > p_8 > p_9 > p_1$$

   Получили противоречие. Значит, таких простых чисел не существует.

   Ответ. Таких простых чисел не существует.

5. Докажите, что
$$\frac{x}{x + y^2 + z^2} + \frac{y}{x^2 + y + z^2} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z} > \frac{1}{10},$$
   если $x, y, z \geq 1$, $x + y + z = 25$, $xy + yz + xz = 191$.

   Решение. Так как $x, y, z \geq 1$, то $x^2 \geq x$, $y^2 \geq y$, $z^2 \geq z$. Тогда в левой части неравенства заменим в знаменателях x на x^2, y на y^2, z на z^2. Каждый знаменатель увеличится, а каждая дробь при этом уменьшится:

$$\frac{x}{x + y^2 + z^2} + \frac{y}{x^2 + y + z^2} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z} \geq \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

   (Знаменатель и дробь не изменятся, если какая-то переменная будет равна 1.)
   Преобразуем правую часть:

$$\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} =$$
$$= \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x + y + z}{(x + y + z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz} = \frac{25}{25^2 - 2 \cdot 191} = \frac{25}{243} > \frac{25}{250} = \frac{1}{10}$$

   Таким образом доказали требуемое:

$$\frac{x}{x + y^2 + z^2} + \frac{y}{x^2 + y + z^2} + \frac{z}{x^2 + y^2 + z} > \frac{1}{10},$$