Решения муниципального этапа ВсОШ по математике

9 класс

1. Пять собачек Рекс, Дик, Шарик, Ной и Принц участвовали в соревнованиях: бег, ориентирование на местности, поиск спрятанного предмета. У собачек были ошейники какого-то одного из цветов: оранжевый, бирюзовый и фиолетовый. Во всех трех соревнованиях на первом месте была собака с оранжевым ошейником, на втором с бирюзовым и на третьем с фиолетовым. На последнем месте в беге был Рекс, в ориентировании Шарик, а искал спрятанный предмет хуже всех Принц. Могли ли у Дика и Ноя быть ошейники одинакового цвета? Во время соревнований ошейники у собачек не менялись.

Решение. Собачек всего пять, цветов ошейников – три, значит у одной собачки будет ошейник отличного от всех цвета. Это не Рекс, не Шарик и не Принц, значит это либо Дик, либо Ной, а значит у них не может быть ошейников одинаковых цветов.

Ответ. Нет.

2. Решите неравенство $\frac{y-3\sqrt{y}-4}{y+2\sqrt{y}-3} < 0$.

Решение. Ввести замену $\sqrt{y} = x, x \geq 0$, тогда получим

$\frac{x^2-3x-4}{x^2+2x-3} < 0$, или $\frac{(x-4)(x+1)}{(x+3)(x-1)} < 0$.

Решая полученное неравенство методом интервалов, с учётом условия $x \geq 0$, получим

$1 < x < 4$, или $1 < \sqrt{y} < 4$, откуда $1 < y < 16$.

Ответ. (1; 16).

3. Найдите функцию $g(x)$, удовлетворяющую равенству
   $g\left(t^2+\sqrt{t}\right) = t^4 + (2t^2-1)\sqrt{t} - t^2 + t$ при любом $t \geq 0$.

Решение. Запишем данное равенство в виде

$$g\left(t^2+\sqrt{t}\right) = t^4 + 2t^2\sqrt{t} + t - (t^2+\sqrt{t}) \qquad (1)$$

Пусть $t^2 + \sqrt{t} = x,$ (2)

Или $t^4 + 2t^2\sqrt{t} + t = x^2.$ (3)

Учитывая (2) и (3), равенство (1) примет вид $g(x) = x^2 - x$.

Ответ. $g(x) = x^2 - x$.

4. Докажите, что при $m > 0, n > 0$ и $m^2n^2 = m + n$ выполняется равенство
$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{m^3+m^2+1}{n^3+n^2+1}.$$

Доказательство. При $m = n$ получим тождество. Пусть $m \neq n$. Так как

$m^2n^2 = m + n$, то $m^2n^2(m-n) = (m+n)(m-n)$, или

$$m^3n^2 - m^2n^3 = m^2 - n^2. \qquad (4)$$

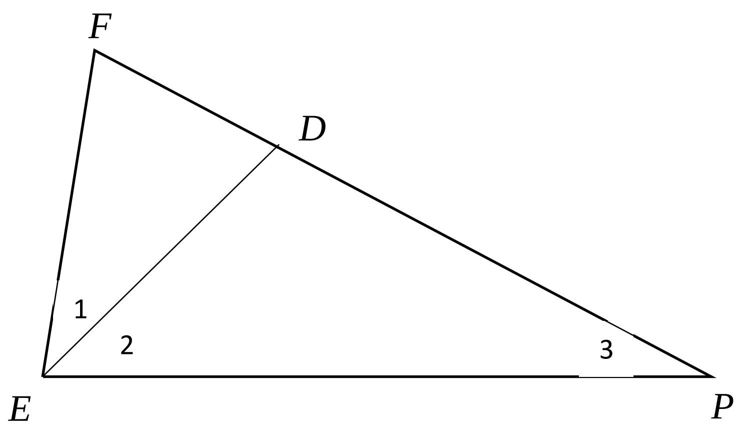
Прибавим к обеим частям (4) $m^2n^2 \neq 0$:

$$m^3n^2 - m^2n^3 + m^2n^2 = m^2 - n^2 + m^2n^2,$$

$$m^3n^2 + m^2n^2 + n^2 = m^2n^3 + m^2n^2 + m^2$$

или $m^2(n^3 + n^2 + 1) = n^2(m^3 + m^2 + 1)$ откуда $\frac{m^2}{n^2} = \frac{m^3+m^2+1}{n^3+n^2+1}$. Что и требовалось доказать.

5. В треугольнике EFP: $\angle FEP = 2\angle FPE$, $FP = EF + 2$, $EP = 5$. Найдите EF и FP.



Решение. Проведем биссектрису ED. Тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

В ΔEDP: $ED = DP.$ Пусть $EF = x, ED = DP = y$, тогда $FP = x + 2, FD = x + 2 - y$. Заметим, что $\Delta EFD \sim \Delta PFE$ по двум углам ($\angle F$ – общий, $\angle 1 = \angle 3$).

Из подобия имеем:

$$\frac{EF}{FP} = \frac{FD}{EF} = \frac{ED}{EP},$$

или

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}.$$

Для нахождения x и y получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{y}{5}, \\ \dfrac{x+2-y}{x} = \dfrac{y}{5}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $5y - 10 = 2y$, откуда $y = \frac{10}{3}$, тогда $x = 4$. Значит $EF = 4, FP = 6$.

Ответ. $EF = 4, FP = 6$.