9 класс

$\boxed{1}$ *Докажите, что если абсциссы точек пересечения прямой ℓ с графиком функции $y = x^2$ равны x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$), а абсцисса точки пересечения ℓ с осью абсцисс не совпадает ни с x_1, ни с x_2 и равна x_0, то*

$$\frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

Решение. Прямая ℓ, пересекающая ось абсцисс в точке $(x_0; 0)$, имеет уравнение вида $y = k(x - x_0)$. В точках пересечения этой прямой с параболой $y = x^2$ абсциссы удовлетворяют уравнению $x^2 - kx + kx_0 = 0$. Поэтому по теореме Виета $x_1 + x_2 = k$ и $x_1x_2 = kx_0$. При $x_0 = 0$ прямая ℓ проходит через точку $(0; 0)$, поэтому x_0 равно либо x_1, либо x_2 (что не так по условию). Если $k = 0$, то прямая ℓ имеет с параболой $y = x^2$ одну общую точку, и значит $x_1 = x_2$ (что не так по условию). Значит, $kx_0 \neq 0$ и $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{k}{kx_0} = \dfrac{1}{x_0}$.

$\boxed{2}$ Целая часть числа *a – это наибольшее целое число, не превосходящее a. Целая часть a обозначается $[a]$. Например, $[2,34] = 2$, $[-\pi] = -4$ и $[5] = 5$. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение*

$$\left[\frac{x}{20}\right] = \left[\frac{x}{23}\right] + 1?$$

Решение. Пусть $x = 23q + r$, где остаток $0 \leqslant r \leqslant 22$. Тогда $\left[\dfrac{x}{20}\right] = q + 1$, $\left[\dfrac{23q + r}{20}\right] = q + 1$ и $\left[q + \dfrac{3q + r}{20}\right] = q + 1$. Отсюда $\left[\dfrac{3q + r}{20}\right] = 1$, то есть $20 \leqslant 3q + r \leqslant 39$. Далее, $-\dfrac{2}{3} = \dfrac{20 - 22}{3} \leqslant \dfrac{20 - r}{3} \leqslant q \leqslant \dfrac{39 - r}{3} \leqslant \dfrac{39 - 0}{3} = 13$. Таким образом, $0 \leqslant q \leqslant 13$. При q от 0 до 13 получим соответственно $20 \leqslant r \leqslant 39$, $17 \leqslant r \leqslant 36$, $14 \leqslant r \leqslant 33$, $\ldots$, $-19 \leqslant r \leqslant 0$. С учетом $0 \leqslant r \leqslant 22$ подходящих значений r имеем соответственно 3, 6, 9, 12, 15, 18, 20, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1. А всего – $6 \cdot 19 + 19 + 20 = 153$. Столько будет и решений.

$\boxed{3}$ *77 глупцов встали в большой круг. Раз в минуту каждый из них одновременно с другими говорит одну из двух фраз: «Все хорошо!» или «Все плохо!». При этом* каждый *глупец, оба соседа которого сказали фразу, отличающуюся от его фразы, при очередном высказывании меняет свое высказывание. Остальные же глупцы в очередную минуту произносят ту же фразу, что и на прошлой минуте. Докажите, что настанет момент, когда высказывания перестанут меняться.*

Решение. Закодируем фразу «Все хорошо!» крестиком, а фразу «Все плохо!» ноликом. Тогда по кругу стоят крестики и нолики, которые раз в минуту одновременно преобразуются по указанным в условии правилам. При этом если два одинаковых знака стоят рядом, то по правилам при наступлении очередной минуты они оба не изменятся (а поэтому не изменятся и никогда). Назовем знак (крестик или нолик) *финальным*, если рядом с ним стоит хотя бы один такой же. Финальные знаки больше не меняются (и остаются финальными). Поскольку при нечетном общем количестве знаков 77 найдется хотя бы одна пара одинаковых соседних знаков, финальные знаки есть изначально. Если знак не финальный, то оба соседних знака противоположны ему и в следующую минуту знак изменится на противоположный.

Пока изменения знаков еще возможны, существуют и финальные и нефинальные знаки, в частности существует хотя бы одна пара из рядом стоящих финального A и нефинального знака B. Поскольку финальный знак A измениться не может, в очередную минуту изменится B и станет таким же, как A. При этом появится пара одинаковых знаков рядом и знак B станет (навсегда) финальным. Таким образом, количество финальных знаков с каждой минутой строго возрастает, поэтому не менее чем за 76 минут все знаки станут финальными и изменений больше не будет.

$\boxed{4}$ *Треугольник ABC – равнобедренный ($AB = BC$). На продолжении AC за точку C выбрана точка M. Докажите что разность расстояний от точки M до прямых AB и BC равна длине высоты AH треугольника ABC.*

Решение. Пусть проекции точки M на стороны AB и BC есть точки P и Q соответственно. Поскольку $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMB} - S_{\Delta CMB}$, то $AB \cdot MP - BC \cdot MQ = AB \cdot (MP - MQ) = AB \cdot CK$, где CK – высота, проведенная к AB. Поскольку $AH = CK$, то $MP - MQ = AH$.

$\boxed{5}$ *Имеется кучка аккумуляторов, среди которых ℓ заряженных и n разряженных. Заряженные и разряженные аккумуляторы перемешаны и не отличаются на вид. Если в детскую машинку вставить два заряженных аккумулятора и включить машинку, то машинка поедет. А если хотя бы один аккумулятор из двух разряжен – то не поедет. Назовем* пробой *установку пары аккумуляторов и включение машинки. Какое наименьшее число проб гарантирует, что машинка поедет, если: а) $\ell = n + 1$; б) $\ell = n$?*

Решение. а) Пусть проб было $n + 1$. Для краткости будем называть аккумулятор *«актором»*. Поскольку всего акторов $2n + 1$, есть актор A, который участвовал хотя бы в двух пробах. Назначим его разряженным. В остальных $n - 1$ пробах назначим назначим разряженным один актор кроме A. Тогда разряженных акторов не более n, а машинка не едет ни при одном включении.

Разобьем акторы на группки: $n - 1$ по два актора и 1 из трех акторов. Если можно сделать $n + 2$ пробы, то проверим все пары акторов из одной группки: по одной паре в группках из двух акторов и три пары в группке из трех. Поскольку в одной из n группок есть два заряженных актора, то машинка хотя бы однажды поедет.

б) Пусть проб было $n + 2$. Тогда некоторый актор (назовем его B) участвовал более чем в одной пробе. Назначим его разряженным. Если проб без участия B было $n - 1$ или меньше, то назначим в каждой такой пробе один разряженный актор. Всего будет не более n разряженных, а машинка ни после какой пробы не поедет. Если же проб без участия B было n, то поскольку в этих пробах участвовали не более $2n - 1$ акторов, среди них найдется актор C, который участвовал более чем в одной пробе. Назначим его разряженным. Остальных проб не более $n - 2$, в каждой из которых назначим один разряженный актор. Тогда всего не более n разряженных акторов, а машинка ни при одном включении не едет.

Если можно сделать $n + 3$ проб, то разобьем акторы на группки: 2 по три, остальные по два. Тогда всех пар акторов, принадлежащих одной группке, $(n-3)+3+3 = n+3$. Так как группок $n - 1$, в одной из группок есть два заряженных актора. После их включения машинка поедет.