ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2023-2024 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский.

задача 9.3 предложена А.Б. Купавским

9 класс

9.1. В кружке занимаются 19 школьников. На праздник 8 Марта некоторые мальчики послали открытки девочкам из кружка. Оказалось, что каждая девочка получила ровно одну открытку, а любые два мальчика послали разное число открыток. Какое наибольшее число мальчиков могло быть в кружке?

Ответ. 5.

Решение. Если мальчиков в кружке хотя бы 6, то они суммарно послали не меньше 0+1+2+3+4+5=15 открыток (так как любые два мальчика послали разное число открыток). Значит, девочек кружке не меньше 15 (так как каждая девочка получила одну открытку). То есть всего в кружке не меньше 21 школьника. Получили противоречие. Значит, мальчиков не больше 5. В кружке может быть ровно 5 мальчиков и 14 девочек. Мальчики могут послать 0, 1, 2, 3 и 8 открыток.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что мальчиков не больше 5 – 4 балла.

Приведен пример рассылки открыток для 5 мальчиков – 3 балла.

9.2. В кошельке лежит 100 рублей монетами по 1 рублю. Каждый из 50 человек подходил к кошельку и либо брал монету достоинством 1 рубль, либо клал в кошелек монету достоинством 2 или 5 рублей. Могло ли в кошельке в итоге оказаться ровно 201 рубль?

Ответ. Не могло.

Решение. Можно считать, что если человек забрал монету достоинством 1 рубль, то он положил 2 рубля, а забрал 3. А если он положил монету достоинством 5 рублей, то он положил 2 рубля, а потом положил еще 3. Тогда можно считать, что каждый клал в кошелек по 2 рубля, а потом, возможно, клал или забирал 3 рубля. Тогда 50 человек положат в кошелек 100 рублей (в кошельке станет 200 рублей), а потом возьмут или заберут несколько раз по 3 рубля. Но тогда к 200 рублям добавится (вычтется) сумма, кратная 3. Но 201–200=1. Поэтому в кошельке не может оказаться 201 рубль.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

9.3. Есть набор из 18 чисел: 1, 2, 3, ..., 9 и $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{9}$. Их разбили на 6 групп по 3 числа, и числа в каждой группе перемножили. Какое наибольшее количество из этих 6 произведений могло оказаться целыми числами?

Ответ. 5.

Решение. Докажем, что все 6 произведений не могут быть целыми. Заметим, что произведение всех 18 чисел равно 1. Поэтому, если все 6 произведений будут целыми, то каждое из них равно 1. Рассмотрим тройку чисел, содержащих число $\frac{1}{7}$. Чтобы их произведение было целым, необходимо, чтобы в эту тройку входило число 7. А чтобы это произведение равнялось 1, оставшееся число должно равняться 1. Аналогично, в тройку с числом $\frac{1}{5}$ войдут числа 5 и 1. Осталось заметить, что теперь для числа $\frac{1}{9}$ невозможно подобрать два числа из оставшихся, чтобы их произведение равнялось 1. Поэтому целых произведений не больше 5.
5 целых произведений может получиться, например, при таком разбиении на тройки: $\left(\frac{1}{7}; 7; 1\right)$, $\left(\frac{1}{5}; 5; 1\right)$, $\left(2; 4; \frac{1}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 8\right)$, $\left(\frac{1}{9}; 9; 3\right)$, $\left(\frac{1}{3}; 6; \frac{1}{6}\right)$. Целыми будут 5 произведений в первых 5 тройках.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что все 6 произведений не могут быть целыми – 5 баллов.

Приведен пример с 5 целыми произведениями – 2 балла.

9.4. На столе лежат 90 карточек с числами от 1 до 90. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход можно взять со стола любую карточку. Игра заканчивается, когда на столе останется две карточки. Второй выигрывает, если числа на оставшихся карточках отличаются ровно на 10. Иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Первый.

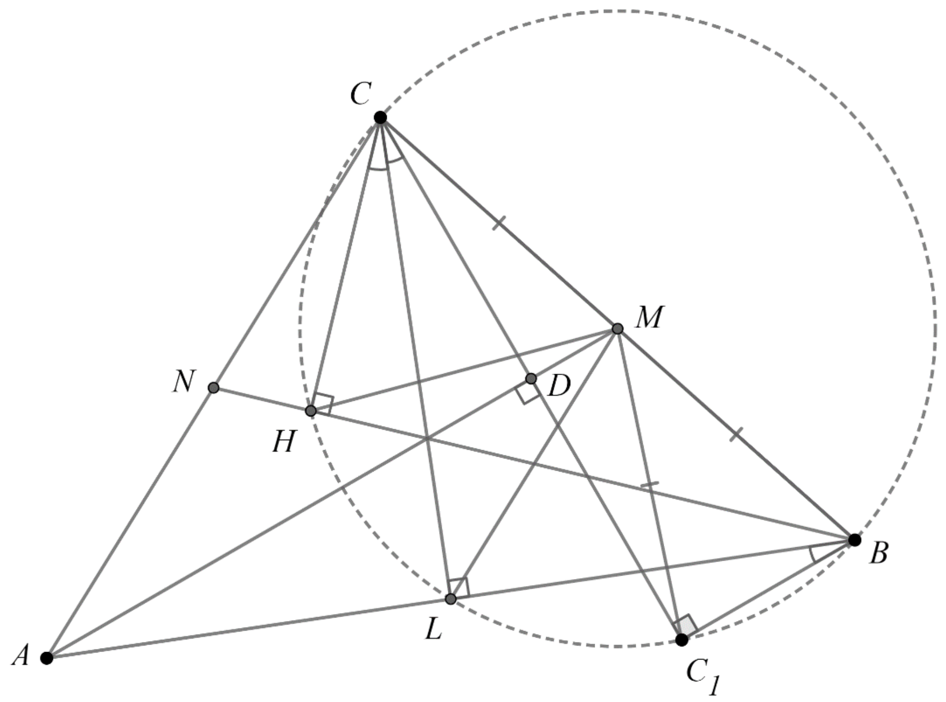
Решение. Опишем стратегию первого игрока. Пусть он выделит следующие карточки: с числами от 11 до 20 (включительно), от 31 до 40, от 51 до 60 и от 71 до 80. Выделенных карточек 40. Невыделенные карточки разобьются на 5 групп по 10 карточек (с числами от 1 до 10, от 21 до 30, от 41 до 50, от 61 до 70 и от 81 до 90), причем если две невыделенные карточки находятся в одной группе, то числа на них отличаются не больше чем на 9, а если в разных, то не меньше чем на 11. Всего в игре каждый игрок сделает по 44 хода. Поэтому за свои первые 40 ходов первый игрок должен забрать выделенные карточки (это произойдет быстрее, если второй игрок также заберет какие-то выделенные карточки). Поэтому в конце игры останутся две невыделенные карточки, и числа на них будут отличаться не на 10.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Замечание. Существуют и другие стратегии первого игрока.

9.5. Точки L, M и N – соответственно середины сторон AB, BC и AC равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$), где $\angle ACB > 60°$. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой AM, а точка H – основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую BN. Докажите, что луч ML является биссектрисой угла HMC_1.



Решение. Из симметрии точек C и C_1 относительно AM следует равенство MC_1=MC=MB. Но тогда в треугольнике CC_1B медиана C_1M равна половине стороны CB, к которой она проведена, значит, угол CC_1B – прямой. Также, по условию, прямыми являются углы CHB и CLB (CL – медиана равнобедренного треугольника ACB). Следовательно, точки C_1, L и H лежат на окружности с диаметром CB и центром в точке M. Значит, для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что дуги HL и LC_1 этой окружности равны. А это равносильно равенству вписанных углов HCL и C_1CL. Последнее следует из того, что CH и CC_1 – перпендикуляры к симметричным относительно CL прямым BN и AM.

Комментарий.

Доказана принадлежность точек C_1, L и H одной окружности – 2 балла.