9 класс

1. Решите уравнение

$$(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5$$

Ответ: $1 \pm \sqrt{5}$.

Решение.

$$(x^2 - x - 1)^2 - x^3 - 5 = 0$$

$$(x^2 - x - 1)^2 - 4 - x^3 - 1 = 0$$

$$(x^2 - x - 1 - 2)(x^2 - x - 1 + 2) - (x^3 + 1) = 0$$

$$(x^2 - x - 3)(x^2 - x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\text{нет корней} \qquad\qquad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

2. Две бригады землекопов выкопали по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она могла бы закончить работу на 2 часа раньше. Определить число землекопов в каждой бригаде, если производительность у всех одинакова.

Ответ: В первой бригаде 25 землекопов, во второй — 24.

Решение. Пусть x — количество землекопов первой бригады, y — второй бригады, t — время работы первой бригады. Производительность каждого землекопа можно считать равной единице. Из условия задачи следует

$$\begin{cases} xt = y\left(t + \frac{1}{2}\right) \\ xt = (x + 5)(t - 2) \end{cases}$$

Выражая t через x и y из одного уравнения и подставляя в другое, получим

$$4x^2 - 4xy + 20x - 25y = 0.$$

При этом x и y — натуральные числа. Выразим y через x:

$$y = \frac{4x^2 + 20x}{4x + 25} = x - \frac{5}{4} + \frac{125}{4(4x + 25)}.$$

Умножим последнее равенство на 4, получим

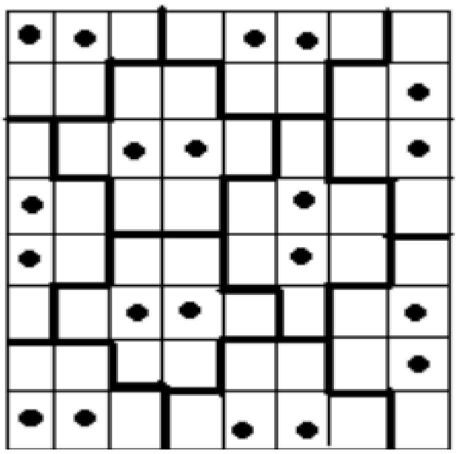
$$4y = 4x - 5 + \frac{125}{4x + 25}.$$

Из того, что x и y — натуральные числа, следует, что $4x + 25$ является делителем 125. А поскольку $4x + 25 > 25$, то $4x + 25 = 125, x = 25, y = 24$.

3. Сколько клеток нужно отметить на клетчатой доске 8 на 8 так, чтобы каждая клетка доски, включая отмеченные, была соседней по стороне с некоторой отмеченной клеткой? Найдите все возможные ответы. Считаем, что клетка не является соседней сама с собой.

Ответ: 20.

Решение. Сначала соберёмся с силами и отметим на доске 8 на 8 двадцать клеток, как того требует условие. Например, так, как это показано на рисунке. При этом доска естественным образом разбивается на 10 частей, как это показано жирными линиями на рисунке. Каждая часть состоит из клеток, соседних с данной парой отмеченных.

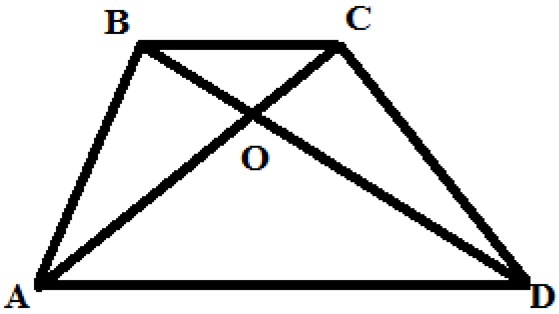


Теперь, используя построенный пример, докажем, что единственным ответом задачи являются именно 20 клеток. Рассмотрим разбиение доски на 10 частей, указанных в примере. Дальше везде будем называть фигурами именно эти части данного примера. Назовём центральными клетками каждой фигуры те, что отмечены в примере на рисунке. Вспомним, что шахматная доска имеет естественную раскраску клеток в шахматном порядке и рассмотрим в каждой фигуре её чёрную и белую части, состоящие из чёрных и белых клеток этой фигуры соответственно. Заметим, что белая центральная клетка фигуры соседствует только с чёрными клетками только этой фигуры, причём со всеми, и чёрная центральная клетка фигуры соседствует только с белыми клетками только этой фигуры, причём со всеми. Рассмотрим теперь произвольную разметку клеток на доске, удовлетворяющую условию задачи, и докажем, что каждая фигура содержит ровно две отмеченные клетки, откуда будет следовать ответ задачи. Действительно, если некоторая фигура содержит не меньше трёх отмеченных клеток, то она содержит не меньше двух белых отмеченных, либо не меньше двух чёрных отмеченных, тогда центральная клетка противоположного цвета этой фигуры будет соседней не менее чем с двумя отмеченными, что противоречит условию. А если некоторая фигура содержит не больше одной отмеченной клетки, то в ней либо не будет белых отмеченных клеток, либо не будет чёрных отмеченных клеток, тогда центральная клетка противоположного цвета этой фигуры вообще не будет соседней ни с какой отмеченной клеткой, что тоже противоречит условию. Следовательно, каждая фигура содержит по две отмеченных клетки, поэтому любой пример содержит ровно 20 отмеченных клеток. Заметим, что построенный в данном решении пример не единственный. Например, можно повернуть доску на 90 градусов, и получится новый пример, отличный от рассмотренного, но всё равно, любая фигура содержит по две отмеченных клетки из нового примера.

4. Диагонали разделили трапецию на четыре треугольника. Могут ли площади трёх из них быть последовательными натуральными числами?

Ответ: не могут.

Решение.



В решении задачи используем два геометрических факта:

1) В любой трапеции площадь треугольника ABO равна площади треугольника DCO (см. рисунок).

Истинность этого утверждения вытекает из равновеликости треугольников ABD и DCA по общей стороне и равным высотам к ней.

2) В любом выпуклом четырёхугольнике произведение площадей треугольников ABO и DCO равно произведению площадей треугольников CBO и DAO (см. рисунок).

Это утверждение верно, так как отношение площадей ABO и BOC равно отношению площадей ADO и DOC (т.к. каждая из этих дробей равна отношению AO к OC).

Предположим, что площади трёх треугольников из условия могут быть последовательными натуральными числами. Обозначим площадь треугольника ABO за a.

Тогда площадь DOC также равна a (см. факт 1). Следовательно, a — одно из трёх последовательных чисел. Оно не может быть как наименьшим, так и наибольшим из них (иначе получим противоречие с фактом 2).

Значит, площади двух оставшихся треугольников равны $a-1$ и $a+1$. И, согласно факту 2, $a \cdot a = (a-1)(a+1)$, что невозможно ни при каких значениях a.

Примечание для жюри. Факты 1) и 2) могут быть бездоказательно использованы учащимися как известные, что не должно приводить к снижению баллов!

5. Пусть a, b — длины катетов, c — длина гипотенузы прямоугольного треугольника. Докажите, что

$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} < \sqrt{2} + 2$$

Решение. Выполним преобразования, несколько раз используя соотношение $a^2 + b^2 = c^2$

$$c^3 - a^3 - b^3 = c \cdot c^2 - a^3 - b^3 = ca^2 + cb^2 - a^3 - b^3 =$$
$$= a^2(c-a) + b^2(c-b) = (c^2 - b^2)(c-a) + (c^2 - a^2)(c-b) =$$
$$= (c-a)(c-b)(c+b+c+a) = (c-a)(c-b)(2c+a+b)$$

С учетом этого упрощения, требуется доказать неравенство

$$c < a + b < \sqrt{2}c$$

Левая часть — это неравенство треугольника. Докажем правую часть этого неравенства

$$a + b < \sqrt{2}c \Leftrightarrow (a+b)^2 < 2c^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 < 2c^2 \Leftrightarrow 2ab < c^2 \Leftrightarrow 2ab < a^2 + b^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2 > 0$$

Неравенство доказано.