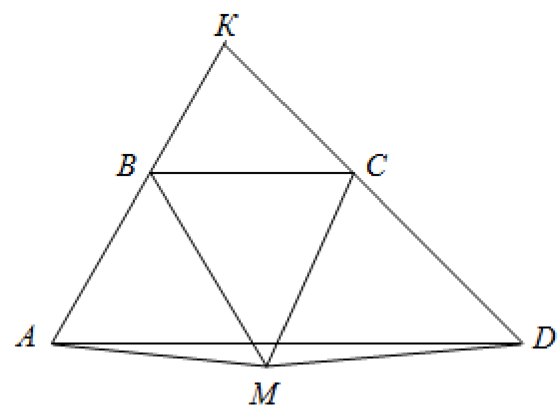
9 класс

9.1. Можно ли найти такие нецелые числа x и y, что оба числа $7x + 6y$ и $8x + 7y$ – целые?

Ответ. Нельзя. **Решение.** Пусть $7x + 6y = m$, $8x + 7y = n$, где m и n – целые. Рассмотрим эти равенства как систему уравнений. Домножим первое уравнение на 8, а второе – на 7. После вычитания получим $y = 7n - 8m$, т.е. y – целое число.

9.2. Сколько решений имеет уравнение $x^2 = y^2 + 2023$ в натуральных числах x, y?

Ответ: 3. **Решение**. Данное уравнение равносильно такому: $(x - y)(x + y) = 2023$. Поскольку 2023 раскладывается на простые множители в виде $2023 = 7 \cdot 17^2$, то, учитывая, что x и y натуральные и $x - y > 0$ (в силу данного уравнения), получаем три системы уравнений $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 2023; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 289; \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 17, \\ x + y = 119 \end{cases}$ Каждая из этих систем имеет одно решение в натуральных числах. Укажем эти решения: 1) $x = 1012$, $y = 1011$; 2) $x = 148$, $y = 141$; 3) $x = 68$, $y = 51$.



9.3. Дана трапеция $ABCD$ с углами A и D при основании AD, равными 60° и 45° соответственно. Биссектрисы углов B и C пересекаются в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ABM и CDM.

Ответ: $\frac{S_{ABM}}{S_{CDM}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **Решение**. Пусть K – точка пересечения прямых AB и CD. Так как BM – биссектриса угла ABC, то точка M равноудалена от прямых AB и BC. Аналогично, точка M равноудалена от прямых BC и CD как биссектриса угла BCD. Следовательно, точка M равноудалена от прямых AB и CD. Значит, она лежит на биссектрисе угла AKD, а треугольники ABM и CDM имеют равные высоты из вершины M. Поэтому $\frac{S_{ABM}}{S_{CDM}} = \frac{AB}{CD}$. В силу параллельности оснований трапеции BC и AD, по теореме Фалеса имеем $\frac{AB}{CD} = \frac{AK}{KD}$, а по теореме синусов для ΔAKD получим $\frac{AK}{KD} = \frac{\sin\angle ADK}{\sin\angle KAD}$. Таким образом, $\frac{S_{ABM}}{S_{CDM}} = \frac{\sin\angle ADK}{\sin\angle KAD} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

9.4. На столе лежат 99 монет гербом вверх. За один ход можно выбрать любые n монет и перевернуть их. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все монеты лежали гербом вниз, если **а)** $n = 5$; **б)** $n=95$?

Ответ. 21 **Решение**. Будем считать, что монеты выложены в ряд. Покажем сначала, что число ходов должно быть нечетным. Для этого представим монеты как числа ±1, а ход заключается в смене знака у пяти чисел, герб соответствует $(+1)$, а перевернутая монета (решка) (-1). Рассмотрим число P, равное произведению чисел на столе. Вначале $P = +1$ и при каждом ходе знак P меняется на противоположный (т.к. меняется знак у пяти сомножителей). В конце должны иметь $P = (-1)^{99}$ $\overline{1}$, но за четное число ходов знак у P не меняется. Далее, очевидно, что за 19 (или менее) ходов можно перевернуть не более $19\cdot5 = 95$ монет. А за 20 ходов, как мы только что доказали, перевернуть все монеты тоже нельзя. Осталось привести пример на 21 ход. За 19 ходов, последовательно переворачивая по 5 монет, получим $\underbrace{--\ldots-}_{95}++++$ (95 минусов и 4 плюса).

Последние 7 монет за два хода переворачиваем так: $\underbrace{---}++\underbrace{++} \Rightarrow \underbrace{+++++}-- \Rightarrow -------$.

Ответ. 3. **Решение** для оценки того, что двух ходов недостаточно. Приведем пример на 3 хода. Первым ходом (так же, как в задаче 7.5) получаем 95 минусов и 4 плюса. Следующим ходом переворачиваем монеты с 3-й по 95-ю и две последние, тогда получим $--++\,+++--$ $\underbrace{\ldots}$ и последних ходом перевернем все 95 плюсов.

9.5. Существует ли такое натуральное n, что сумма цифр каждого из чисел n и n+1 делится на 100?

Ответ: существует. **Решение.** Обозначим через $s(n)$ сумму цифр натурального числа n. Если n оканчивается не на 9, то $s(n+1)=s(n)+1$, и такое n не подходит. Пусть теперь n оканчивается на k девяток, т.е. имеет вид $n=\overline{m99...9}$ где m – натуральное число, оканчивающееся не на 9. Тогда $s(n)=s(m)+9k$, $s(n+1)=s(m)+1$. Вычитая эти числа, из условия задачи получим $9k-1=100\cdot l$ при некотором l. Возьмем $l = 8$ (чтобы $100l+1$ делилось на 9, наименьшим l будет $l = 8$). Отсюда $9k=801$ и $k=801:9=89$. Чтобы $s(n)$ делилось на 100, в силу равенства $s(n) = s(m) + 801$ можно положить $s(m) = 99$. Тогда m можно взять, например, 12-значным: $m = 99...981$ (здесь 10 девяток) и значит, n будет 101-значным числом $n = 99...98199...9$ (вначале 10 девяток, затем 8 и 1, в конце – 89 девяток), а можно m взять состоящим из 99 единиц, и тогда n будет 188-значным числом: $n = 11…199...9$ (99 единиц и 89 девяток).