Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный тур

2023 - 2024 учебный год

9 класс

Ответы и решения.

Максимальное количество баллов: 35 .

Общие критерии оценивания каждой задачи:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача №1

Последовательность чисел строится следующим образом:

на первом месте стоит число 7; далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1, т.е. на втором месте стоит 14, так как $7^2 = 49$, $4 + 9 = 13$, $13 + 1 = 14$;

на третьем месте стоит 17 и т.д. Какое число стоит на 2023 месте?

Ответ: 11.

Решение.

Выпишем несколько первых членов данной последовательности:

7; 14; 17; 20; 5; 8; 11; 5; …

Члены последовательности, начиная с пятого, периодически повторяются через каждые три члена. Так как число 2023 при делении на 3 дает остаток 1,

(2023 = 3 · 674 + 1), и тогда 2023 – ий член последовательности будет таким же, как и 7 – ой, 10 – ый, 13 – ый, …, то есть a_{2023} =11.

Ответ: 11

Задача №2

На плоскости даны 6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две точки соединены отрезком одного из двух цветов: красным или синим.

Доказать, что при этом образуется хотя бы один треугольник с вершинами в заданных точках, все стороны которого имеют одинаковый цвет.

Решение.

Пусть А – одна из шести точек. Среди остальных точек найдутся хотя бы три таких, которые соединены с точкой А отрезками одинакового цвета.

Пусть, например, точки B, C, D соединены с точкой А отрезками красного цвета. Тогда возможно одно из двух:

либо среди треугольников $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ и $\triangle ADB$ найдется хотя бы один, стороны которого будут красного цвета,

либо в треугольнике $\triangle BCD$ все стороны будут синего цвета.

И в том, и в другом случае получим треугольник с вершинами в данных точках, все стороны которого имеют одинаковый цвет.

Что и требовалось доказать.

Задача №3

В ряд поставлено 30 клеток. На самой правой клетке стоит белая фишка, на самой левой – чёрная. Каждый из двух играющих по очереди передвигает свою фишку на одно или два поля вперёд или назад.

Пропускать ход нельзя. Проигравшим считается тот, у кого нет возможности хода.

Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или партнёр?

Ответ: При правильной игре выигрывает начинающий.

Решение.

Выигрывает тот, кто сможет добиться, чтобы после каждого хода число клеток между фишек делилось на три.

То есть при правильной игре выигрывает начинающий. Для этого он должен первым ходом передвинуть фишку на одно поле вперёд, чтобы между фишками стало 27 полей. В дальнейшем, в зависимости от хода партнёра он должен передвигать фишку на столько полей вперёд, чтобы число полей между фишками сократилось на три (если партнёр пойдёт вперёд) или осталось прежнем (если партнёр отступит назад).

Такая ситуация приводит к выигрышу.

Ответ: При правильной игре выигрывает начинающий.

Задача №4

Решите в целых числах уравнение: $19x^2 - 76y^2 = 1976$.

Ответ: Уравнение в множестве целых чисел решений не имеет.

Решение.

$19x^2 - 76y^2 = 1976$,

$x^2 - 4y^2 = 104$, $x^2 = 104 + 4y^2$

Правая часть равенства делится на 4. Тогда x^2 должно делится на 4. Но квадрат целого числа при делении на 4 даёт в остатке 0, либо 1.

$((2n)^2 = 4n^2, (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1)$

Тогда при x= 2n , n $\notin$ Z,

получим 4 $n^2 = 4y^2 + 4$, $n^2 - y^2 = 26$, $(n – y)(n + y) = 1 \cdot 26$ или

$n^2 - y^2 = 2 \cdot 13$,

При $\begin{cases} n - y = 1 \\ n + y = 26 \end{cases}$ получим n = $\frac{27}{2}$ ($\notin$ Z), при $\begin{cases} n - y = 26 \\ n + y = 1 \end{cases}$ получим n = $\frac{27}{2}$ ($\notin$ Z),

Системы $\begin{cases} n - y = 2 \\ n + y = 13 \end{cases}$ и $\begin{cases} n - y = 13 \\ n + y = 2 \end{cases}$

также не имеют решений в множестве целых чисел.

При x = 2n +1 получим $4n^2 + 4n + 1 = 104 + 4y^2$, $1 = 4(26 - n^2 - n + y^2)$.

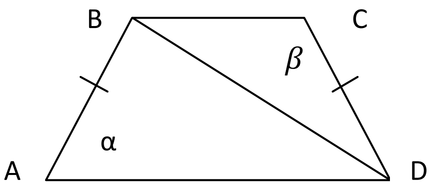
n = $\frac{51}{2}$ ($\notin$ Z),

Это уравнение в множестве целых чисел решений не имеет.

Ответ: Уравнение в множестве целых чисел решений не имеет.

Задача №5

Какие углы может иметь равнобедренная трапеция, если она разбивается диагональю на два равнобедренных треугольника?



Ответ: Углы трапеции 108˚ и 72˚.

Решение.

В трапеции ABCD (BC ││ AD, AB = CD), проведём диагональ BD. Треугольники Δ ABD и ΔBCD будут равнобедренными, если AD = BD, BC = CD.

Обозначим $\angle BAD = \alpha$ и $\angle BCD = \beta$. Так как трапеция равнобедренная,

то $\alpha + \beta = 180^\circ$. В Δ ABD AD = BD, тогда $\angle ABD = \angle BAD = \alpha$.

$\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = \beta - \alpha$. С другой стороны из ΔBCD (BC = CD),

$\angle DBC = \frac{180^\circ - \beta}{2}$. Получили: $\beta - \alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta)$,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ \\ 2(\beta - \alpha) = 180^\circ - \beta \end{cases}; \begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ \\ 3\beta - 2\alpha = 180^\circ \end{cases}; \begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ \\ 5\beta = 540^\circ \end{cases}; \begin{cases} \beta = 108^\circ \\ \alpha = 72^\circ \end{cases}$$

Ответ: Углы трапеции 108° и 72°.