

Задания для обучающихся**Время выполнения заданий – 235 минут****Максимальное количество баллов – 42**

1. Каждую минуту Чиполлино прибавляет к числителю 2, а Земляничка умножает знаменатель на 2. Какое число у них получится через 2023 минуты, если изначально имелась дробь $\frac{1}{2}$? Ответ обоснуйте.
2. Три подружки Поля, Вика и Таня обсуждали свои успехи в школе по результатам трех контрольных работ. Поля сказала Вике, что учится лучше нее, так как в большинстве случаев ее оценки выше. Вика ответила, что согласна, но тогда по этому показателю она лучше Тани. Тут всех удивила Таня, сказав, что в этом случае она успешнее Поли. Как такое могло случиться?
3. Петя и Вася бежали кросс. Петя бежал первую половину времени, которое он потратил на весь путь, со скоростью 20 км/ч, а вторую половину времени со скоростью 10 км/ч. А Вася первую половину пути бежал со скоростью 10 км/ч, а вторую половину пути со скоростью 20 км/ч. Кто быстрее пришел к финишу?
4. План мексиканского города Прогресо представляет собой пересечение взаимно перпендикулярных прямых - улиц. На всех улицах одностороннее движение. Все вертикальные прямые пронумерованы последовательными четными числами. А все горизонтальные – последовательными нечетными числами. Любые две соседние улицы разнонаправлены (движение в противоположных направлениях) и находятся на расстоянии 200 метров друг от друга. Мексиканка Катрина стоит на мотоцикле на пересечении 51-й и 60-й улиц, а ей надо попасть на заправку на пересечение 53-й и 62-й. У нее осталось бензина на 1 км, сможет ли она доехать до заправки?
5. Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что
$$\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{9}} > \frac{1}{n}.$$
6. Найдите радиус круга, вписанного в трапецию $ABCD$ (основания AD и BC), если $\angle OCD : \angle ODC = 5 : 1$ и $CD = 12$, O – центр круга.

Материалы для членов жюри (ключи, критерии оценивания)

1. Каждую минуту Чиполлино к числителю прибавляет 2, а Земляничка знаменатель умножает на 2. Какое число у них получится через 2023 минуты, если изначально имелась дробь $\frac{1}{2}$? Ответ обоснуйте.

Ответ. $\frac{4047}{2^{2024}}$. **Решение.** В числителе через минуту будет 3, через две минуты будет 5, и так далее, т.е. через 2023 минуты будет $2 \cdot 2023 + 1 = 4047$. В знаменателе через минуту будет 2^2 , через две 2^3 , и так далее, т.е. через 2023 минуты будет 2^{2024} . Итого получаем дробь $\frac{4047}{2^{2024}}$.

Критерий. Правильный обоснованный ответ – **7 баллов**. Получена правильная конструкция $\frac{2n+1}{2^{n+1}}$ (возможно, описанная словами), но допущена арифметическая ошибка – **6 баллов**. Указана закономерность только в числителе/знаменателе, написано верное число $4047/2^{2024}$ – **3 балла**. Произошел сдвиг на 1, т.е. получен ответ $\frac{4045}{2^{2023}}$ – **1 балл**. В остальных случаях **0 баллов**.

2. Три подружки Поля, Вика и Таня обсуждали свои успехи в школе по результатам трех контрольных работ. Поля сказала Вике, что учится лучше нее, так как в большинстве работ ее оценки выше. Вика ответила, что согласна, но тогда по этому показателю она лучше Тани. Тут всех удивила Таня, сказав, что в этом случае она успешнее Поли. Как такое могло случиться?

Решение

	К1	К2	К3
Полина	5	4	3
Вика	4	3	5
Таня	3	5	4

Критерий. Правильный верный пример распределения оценок – **7 баллов**. В остальных случаях **0 баллов**.

3. Петя и Вася бежали кросс. Петя бежал первую половину времени, которое он потратил на весь путь, со скоростью 20 км/ч, а вторую половину времени со скоростью 10 км/ч. А Вася первую половину пути бежал со скоростью 10 км/ч, а вторую половину пути со скоростью 20 км/ч. Кто быстрее пришел к финишу?

Ответ. Петя. Решение.

	скорость	время	расстояние
Петя	20	$\frac{t}{2}$	S
	10	$\frac{t}{2}$	
Вася	10	$\frac{S}{20}$	$\frac{S}{2}$
	20	$\frac{S}{40}$	$\frac{S}{2}$

Время Пети t .

Путь Пети $10t + 5t = 15t$, это дистанция кросса, тогда $15t = S$.

Время Васи $\frac{S}{40} + \frac{S}{20} = \frac{3S}{40} = \frac{3 \cdot 15t}{40} = \frac{9t}{8} > t$.

Вася затратил больше времени, значит, к финишу первым пришел Петя.

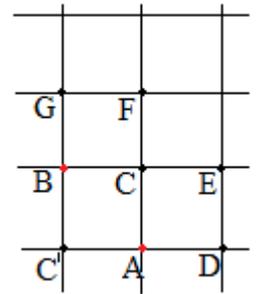
Критерий. Верное решение – **7 баллов**. Построена модель, но при решении допущена вычислительная ошибка, приведшая к неверному результату – **6 баллов**. Найдена закономерность между дистанцией кросса и временем Пети без дальнейших продвижений – **2 балла**. Только верно описаны схемы движения Пети и Васи – за каждую схему **по 1 баллу**. В остальных случаях – **0 баллов**.

4. План мексиканского города Прогресо представляет собой пересечение взаимно перпендикулярных прямых - улиц. На всех улицах одностороннее движение. Те улицы, что идут с севера на юг, пронумерованы подряд четными числами. Те, что идут с запада на восток, пронумерованы подряд нечетными числами. Любые две соседние улицы разнонаправлены (движение в противоположных направлениях) и находятся на расстоянии 200 метров друг от друга. Мексиканка Катрина стоит на мотоцикле на углу 51-ой и 60-ой улиц, а ей надо попасть на заправку на угол 53-ей и 62-ой. У нее осталось бензина на 1 км, сможет ли она доехать до заправки?

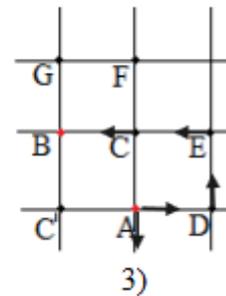
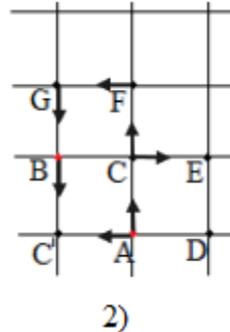
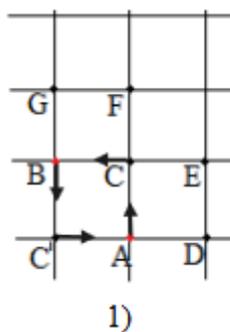
Ответ. Да, сможет.

Решение №1.

Заметим, что улицы 51 и 53 – соседние, улицы 60 и 62 тоже соседние. Пусть Катрина находится в точке А, а попасть ей надо в точку В (как показано на рисунке).



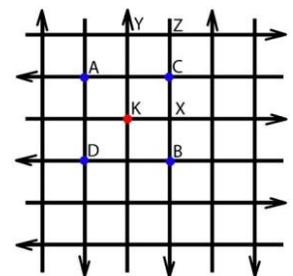
1. Если Катрине повезет с направлением движения, то она проедет два квартала ($AC+CB$ или $AC'+C'B$), т.е. 400 метров. Заметим, что в этой ситуации одна из дорог AC и AC' идет «правильно» (приближает нас к точке В), а другая «неправильно» (отдаляет нас от точки В). Один из этих двух случаев отмечен на рисунке 1).



2. Пусть обе улицы AC и AC' идут в «правильном» направлении (т.е. можно проехать и от А к С и от А к С'). Проедем по любой из них, например по AC . Т.к. CB идет в направлении противоположном AC' , т.е. в «неправильном» направлении, то FG идет от F к G. Проедем лишний квартал вверх: $A-C-F-G-B$, итоговое расстояние составит $4 \cdot 200 = 800$ метров (рисунок 2).
3. Последний вариант, когда оба отрезка AC и AC' идут «неправильно» – проедем $A-D-E-C-B$, итоговое расстояние также составит $4 \cdot 200 = 800$ метров (рисунок 3).

Если точка В расположена с другой стороны относительно точки А (AB – диагональ какого-то другого квадрата), то возникают абсолютно такие же случаи. В результате общее расстояние, которое придется проехать Катрине, не превосходит 800 м.

Решение №2. Пусть Катрина стоит в точке К и улицы направлены, как показано на рисунке. Тогда заметим, что заправка может находиться в одной из точек: А, В, С или D. До точки А – 400 метров (вверх и влево), до точки В тоже 400 метров (вправо и вниз). До точки С 800 метров ($KYZC$), до точки D тоже 800 метров ($KXBD$).



Заметим, что все точки-перекрестки на этом рисунке равнозначны, то есть если точка K будет выбрана на пересечении улиц с другими направлениями, то достаточно будет повернуть рисунок на угол кратный 90° . Таким образом, при любом расположении точки K , возникают те же самые 4 варианта движения от нее до вершин соответствующего «квадрата 2×2 ».

Критерии. Верное решение – 7 баллов. Указано, что возможны 4 случая, но верно рассмотрено только три из них – 5 баллов, два из них – 4 балла, один из них – 3 балла. Не замечено, что есть 4 случая, а только рассмотрены три случая – 3 балла, два случая – 2 балла, один случай – 1 балл. В остальных случаях – 0 баллов.

5. Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что

$$\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{9}} > \frac{1}{n}.$$

Ответ. $n=3$.

Решение. Преобразуем выражение из левой части неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{9}} &= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2)} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2})} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2})} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} > \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Кроме того заметим, что полученная дробь меньше $\frac{1}{2}$. Следовательно, наименьшее натуральное n , для которого выполняется данное неравенство, равно 3.

Критерии. Верное решение – 7 баллов. Дробь сокращена верно, но вывод сделан на основании только оценки «больше $1/3$ » или «меньше $1/2$ » – 3 балла. Дробь сокращена верно, дальнейших продвижений нет – 2 балла. В остальных случаях – 0 баллов.

6. Найдите радиус круга, вписанного в трапецию $ABCD$ (основания AD и BC), если $\angle OCD : \angle ODC = 5 : 1$ и $CD=12$, O – центр круга.

Ответ. 3.

Решение. Заметим, что O – точка пересечения биссектрис, поэтому

$$\angle ODC + \angle OCD = \frac{1}{2}(\angle ADC + \angle BCD) = 90^\circ.$$

Значит, $\angle DOC = 90^\circ$, т.е. треугольник COD – прямоугольный.

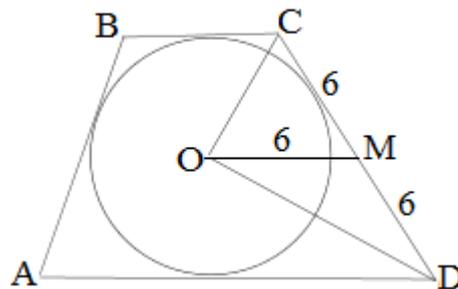
Пусть $\angle ODC = \alpha$, тогда $\angle OCD = 5\alpha$.
 $\angle ODC + \angle OCD = 6\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ = \angle ODC$.

Медиана OM делит треугольник COD на два равновеликих:

$$S_{COD} = 2S_{COM} = 2 \cdot \frac{1}{2} CM \cdot OM \cdot \sin \angle CMO = 6 \cdot 6 \sin 30^\circ = 36 \cdot \frac{1}{2} = 18.$$

($\angle CMO = 30^\circ$ как внешний угол равнобедренного треугольника OMD).

С другой стороны, $S_{COD} = \frac{1}{2} r \cdot CD \Rightarrow r = \frac{2S_{COD}}{CD} = \frac{2 \cdot 18}{12} = 3$ (радиус, проведенный в точку касания перпендикулярен касательной, поэтому радиус является высотой, проведенной к гипотенузе).



Критерии. Верное решение – **7 баллов**. При верном решении допущена арифметическая ошибка – **6 баллов**. В остальных случаях – **0 баллов**.