

**Второй (муниципальный) тур всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2023-2024 учебном году**

9 класс

1. Не прибегая к приближенным вычислениям, сравнить числа

$$a = \sqrt{34} + 5, \quad c = \sqrt{54} + 3.$$

Решение. Из трех гипотез: $a < c$, $a = c$, $a > c$, проверим первую ($a < c$):

$$\begin{aligned} (\sqrt{34} + 5 < \sqrt{54} + 3) &\Leftrightarrow (\sqrt{34} + 2 < \sqrt{54}) \Leftrightarrow ((\sqrt{34} + 2)^2 < 54) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (34 + 4\sqrt{34} + 4 < 54) \Leftrightarrow (4\sqrt{34} < 16) \Leftrightarrow (\sqrt{34} < 4) \Leftrightarrow 34 < 16 \end{aligned}$$

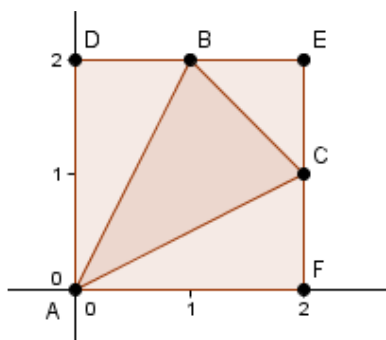
– получили очевидно неверное неравенство, поэтому неверно и равносильное ему неравенство $a < c$. Таким же образом опровергается и вторая из гипотез ($a = c$) и подтверждается третья гипотеза ($a > c$).

Ответ. $a > c$.

2. В декартовой плоскости задан треугольник с вершинами в точках:

$A(2023;2023)$, $B(2024;2025)$, $C(2025;2024)$. Найти площадь треугольника.

Решение. Для удобства произведем параллельный перенос треугольника на вектор $(-2023, -2023)$ (параллельный перенос сохраняет равенство фигур и равенство их площадей). Для вершин полученного треугольника сохраним те же обозначения: $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C(2;1)$ (см. рис.).



Впишем $\triangle ABC$ в прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, с вершинами в точках $A(0;0)$, $D(0;2)$, $E(2;2)$, $F(2;0)$. Площадь прямоугольника $ADEF$ $2 \times 2 = 4$. Треугольник ABC получим, вырезав из $ADEF$ треугольники ADB , AFC , BEC , площади которых 1, 1 и 0,5. Соответственно

этому найдем площадь треугольника ABC : $4 - 2,5 = 1,5$.

Ответ. Площадь треугольника ABC равна $1,5 \text{ ед}^2$.

3. Катер плыл по течению реки 2 часа, после чего сломался мотор, который команда катера отремонтировала 1 час (а катер плыл по течению). После этого катер вернулся обратно за 3 часа. Сколько времени потребовалось бы катеру на возвращение, если бы ремонт мотора продолжался 2 часа?

Решение. Если бы одновременно с катером отплыл плот, то катер встретил бы его через $2 + 1 + 2 = 5$ часов после отправления. За оставшийся час катер прошел расстояние, которое плот преодолел за 5 часов. Во 2-м случае катер встретит плот через 6 часов после отправления, поэтому ему останется пройти в 1,2 раза большее расстояние, на что уйдет 1,2 часа.

Ответ: 3 часа 12 минут.

4. Пусть p, q – два последовательных нечетных простых числа. Доказать, что $p + q$ есть произведение не менее трех натуральных чисел, больших единицы, но не обязательно различных.

Решение. Во-первых, число $\frac{p+q}{2}$ – целое, т.к. $p + q$ – четное, во-вторых, $\frac{p+q}{2}$ не простое, так как находится между соседними простыми числами p и q . Следовательно, $\frac{p+q}{2}$ раскладывается в произведение двух множителей, а $p + q$ раскладывается в произведение этих же сомножителей и двойки.

5. Точка D – середина стороны AC треугольника ABC . На стороне BC выбрана такая точка E , что угол BEA равен углу CED . Найти отношение длин отрезков AE и DE .

Решение. Пусть $\angle BEA = \angle DEC = \varphi$

На продолжении AE за точку E

выберем точку P такую, что $ED = EP$,

на продолжении DE за точку E

выберем точку K такую, что $AE = EK$.

$\angle REK = \angle PEQ = \varphi$, следовательно, RE

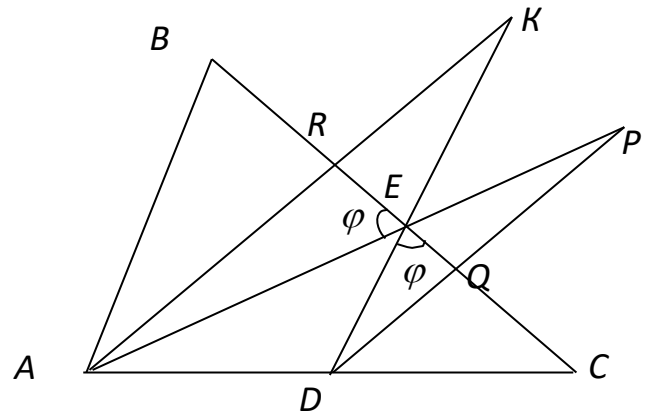
и EQ – серединные перпендикуляры к

AK и DP соответственно.

Прямоугольные треугольники RKE и

EPQ подобны, значит, $KE:EP = RK:QP$ или $AE:ED = AR:DQ$. DQ – средняя

линия в треугольнике ARC , следовательно, $AE:ED = 2:1$.



Ответ. 2:1