Муниципальный этап 9 класс
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2023 - 2024 учебный год

Критерии оценивания выполнения олимпиадных заданий по математике в 9 классе

Решение каждого задания оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Общая оценка за весь этап получается суммированием баллов по каждому из заданий. Максимальное количество баллов за муниципальный этап – 35. Альтернативные способы решения задачи, не учтенные составителями задач в рекомендациях, при условии их правильности и корректности также оцениваются в полной мере. Ниже представлена общая схема оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Выставление премиальных баллов (оценка за задание более 7 баллов) на муниципальном этапе не допускается.

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов.

1. Вычислите $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+2017\sqrt{1+2018\cdot 2020}}}}$.

Решение.

Поскольку $2018 \cdot 2020 = 2019^2 - 1$, $2017 \cdot 2019 = 2018^2 - 1$, …, получаем

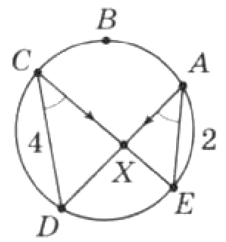
$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+2017\sqrt{1+2018\cdot 2020}}}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+2016\sqrt{1+2017\cdot 2019}}}} = \dots$$

$= \sqrt{1+2\cdot 4}=3$.

Ответ: 3.

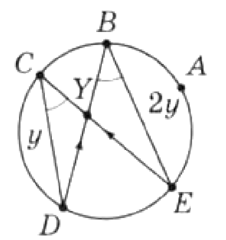
2. Два друга катаются на мотороллерах по новым дорогам, проложенным между селениями, где живут их родственники и друзья. Скорость передвижения каждого мальчика постоянна. Селения A, B, C, D, E лежат на одной окружности и попарно соединены прямолинейными дорогами. Друзья выехали утром одновременно из A в D и из C в E и повстречались в пути. Через некоторое время, так же одновременно они продолжили каждый свой путь, один из D в B, другой из E в C, и вновь повстречались в пути. Наконец, в 18:00 они выехали из B в E и из C в B, прибыв в пункты назначения в одно и то же время. Найдите BC, если AE = 2км, CD = 4км.

Решение.



Пусть при первом заезде друзья встретились в точке X. Так как отрезки AD и CE – хорды одной окружности, то треугольники AXE и CXD подобны. Следовательно, отношение скоростей мотороллеров равно $\frac{AX}{CX} = \frac{AE}{CD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Если скорость первого мотороллера, выехавшего из пункта A, равна V, то скорость второго, выехавшего из C равна 2V.



Пусть при втором заезде мотороллеры встретились в точке У.

Так как треугольники BYE и CYD подобны, то $\frac{CD}{BE} = \frac{DУ}{EУ} = \frac{V}{2V} = \frac{1}{2}$, поэтому BE = 2CD = 8.

Наконец, при третьем заезде $\frac{BC}{2V} = \frac{BE}{V}$, откуда получаем BC = 2BE = 16 (км).

Ответ: 16 км.

3. В четырехугольник ABCD со сторонами AB = 2, BC = 4, CD = 5 вписали окружность и вокруг него описали окружность. Найдите площадь четырехугольника.

Решение 1.

Так как в четырехугольник можно вписать окружность, то

DA = 2 + 5 – 4 = 3

(AB + CD = CB + AD).

Так как четырехугольник вписанный, то

S = $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Но так как он описанный, то p = a + c = b + d (p – полупериметр). Отсюда получается S = $\sqrt{abcd}$ = $\sqrt{2\cdot3\cdot4\cdot5}$ = $2\sqrt{30}$.

Решение 2.

AC, BD – диагонали. Так как четырехугольник вписанный, то

$\angle B + \angle D = \angle A + \angle C = 180^0$, $\angle D = 180^0 - \angle B$.

По теореме косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos\angle B = 20 - 16 \cos\angle B$.

Аналогично,

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos\angle D = 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5 \cos\angle D = 34 - 30\cos(180^0 - \angle B) = 34 + 30\cos\angle B$

$20 - 16\cos\angle B = 34 + 30\cos\angle B$

$46\cos\angle B = -14$, $\cos\angle B = -\frac{7}{23}$, $\sin\angle B = \frac{4\sqrt{30}}{23}$, $\sin\angle D = \sin(180^0 - \angle B) = \sin\angle B$

$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\angle B + \frac{1}{2} AD \cdot DC \sin\angle D = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{4\sqrt{30}}{23} + + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{4\sqrt{30}}{23} = \frac{16\sqrt{30}}{23} + \frac{30\sqrt{30}}{23} = \frac{46\sqrt{30}}{23} = 2\sqrt{30}$

Ответ: $2\sqrt{30}$.

4. В числе 2*0*1*6*0*2* нужно заменить каждую из 6 звездочек на любую из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Для того, чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того, чтобы выполнялась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа). Теперь на оставшиеся пять мест нужно расставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 9. Для этого выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать 9 · 9 · 9 · 9 способами), а пятую цифру подберем так, чтобы сумма всех цифр делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 (0, 1, 2, … 8), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом (например, если сумма всех цифр, кроме последней, равна 50, то в качестве последней цифры выбираем 4, чтобы итоговая сумма цифр делилась на 9). Применяя правило произведения, получаем, что всего

2 · 9 · 9 · 9 · 9 · 1 =13122 способа.

Ответ: 13122 способа.

5. Маша и Саша играют в настольную игру. Ходят по очереди.Маша ходит первая и за один ход может взять со стола любое нечетное число монет, но не более 99 штук, а Саша – любое четное число монет, но не более 100 штук. Всего в игре задействована 2001 монета. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из ребят сможет выиграть при правильной игре?

Решение.

Опишем стратегию Маши. Первым ходом она должна взять со стола 81 монету. Каждым следующим ходом, если Саша берет x монет, она должна взять (101 – x) монет (она всегда может это сделать, потому что, если x – четное число от 2 до 100, то (101- x) - нечетное число от 1 до 99). Так как, $2001 = 101 \cdot 19 + 81 + 1$, то через 19 таких «ответов» после хода Маши на столе останется 1 монета, и Саша не сможет сделать ход, то есть проигрывает.

Ответ: выигрывает Маша.