Пермский край
2023-2024 учебный год

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 9 КЛАСС

Время выполнения заданий — 235 минут (3 часа 55 минут).
Максимальная оценка за выполнение всех олимпиадных заданий — 35 баллов (по 7 баллов за каждую задачу).

9.1. В каждую клетку клетчатого квадрата 3×3 поставили натуральное число от 1 до 9, при этом каждое число использовано ровно один раз. Затем для каждого клетчатого квадрата 2×2, лежащего внутри исходного квадрата 3×3, нашли произведение всех чисел, записанных в этом квадрате 2×2, и выписали полученное произведение на доску. Может ли оказаться, что по крайней мере три из четырёх выписанных на доску чисел будут одинаковы?

Ответ. Да.

Решение. Условию задачи удовлетворяет, например, квадрат

3	4	2
6	5	9
7	1	8

.

Комментарий. Только ответ «да» — 0 баллов.

Выписан подходящий квадрат, даже без проверки — 7 баллов.

Доказано, что либо 5, либо 7 будет в центре, правильного примера нет — 1 балл.

Доказано, что среди чисел 5 и 7 одно будет в центре, а второе — в углу квадрата 3×3, правильного примера нет — 3 балла.

Баллы по двум предыдущим пунктам не суммируются.

Замечание. Есть и другие квадраты 3×3, удовлетворяющие условию задачи.

9.2. Набор из трёх ненулевых чисел дважды подставили в качестве коэффициентов квадратного уравнения: сначала в одном порядке, потом в другом. Может ли оказаться, что в первом случае полученное квадратное уравнение будет иметь 2 положительных корня, а во втором — будет иметь 2 отрицательных корня?

Ответ. Нет.

Решение. Допустим, что такие числа найдутся. Пусть при одной из расстановок мы получили уравнение $ax^2+bx+c=0$, которое имеет 2 отрицательных корня x_1 и x_2. Тогда по теореме Виета числа $\frac{c}{a}=x_1x_2$ и

$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$ положительны. Это значит, что знаки a и b совпадают, и знаки a и c совпадают. То есть числа a, b и c имеют одинаковые знаки.

Но тогда при любой другой расстановке коэффициентов отношение коэффициента при x и коэффициента при x^2 будет положительным, значит не может быть равно $-(z_1 + z_2)$, где z_1 и z_2 положительны. Поэтому любые уравнения такого вида не могут иметь два положительных корня.

Полученное противоречие говорит о том, что наше предположение неверно, и таких трёх чисел не найдётся.

Комментарий. Только ответ «нет» — 0 баллов.

Доказано, что если оба корня квадратного уравнения отрицательны, то знаки его коэффициентов совпадают — 3 балла.

Доказано, что если оба корня квадратного уравнения положительны, то ровно два его коэффициента имеют совпадающий знак — 3 балла.

9.3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ угол A равен 60°, а каждый из остальных 4 углов равен 120°. Докажите, что $AB + AE > BC + CD + DE$.

Первое решение. Пусть прямые BC и DE пересекаются в точке T. Так как $\angle BAE + \angle AED = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, то прямые AB и ET параллельны. По тем же причинам параллельны прямые AE и BT. Отсюда следует, что $ABTE$ параллелограмм и значит $AE = BT$, $AB = ET$.

В силу неравенства треугольника $DT + TC > DC$, но значит $AB + AE = ET + TB = (ED + DT) + (TC + CB) = (DT + TC) + (ED + CB) > BC + CD + DE$.

Второе решение. Повторим все рассуждения из первого абзаца первого решения.

Заметим, что $\angle DCT = 180^\circ - \angle DCB = 60^\circ$ и $\angle TDC = 180^\circ - \angle BDE = 60^\circ$, значит треугольник DCT равносторонний и $DC = CT = DT$. Осталось заметить, что $AB + AE = ET + TB = ED + DT + TC + CB = BC + 2CD + DE > BC + CD + DE$.

Третье решение. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке N, а прямые AE и CD пересекаются в точке P. Треугольники BNC и DPE равносторонние, так как два угла каждого из них смежны углам в 120°. Поэтому $\angle CNB = \angle DPE = \angle BAE = 60^\circ$, значит треугольник ANP также равносторонний.

Пусть $AN = a$, $BC = x$, $DE = y$. Тогда $AB = a - x$, $DC = a - x - y$ и $AE = a - y$. Так как $DC > 0$, то $a - x - y > 0$, $a > x + y$. Поэтому $AB + AE = a - x + a - y = 2a - (x + y) > a = x + (a - x - y) + y = BC + CD + DE$.

Комментарий. Доказано, что (в обозначениях первого решения) $ABTE$ параллелограмм, или доказано, что (в обозначениях третьего решения) треугольник ANP равносторонний — 2 балла.

9.4. Каждый из учеников класса занимается ровно в двух кружках, причём для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, где занимаются не менее $\frac{2}{3}$ учеников этого класса.

Решение. Возьмём любого ученика x, и обозначим кружки, в которых он занимается, за A и B. Если каждый другой занимается также в A и B, то любой из этих кружков удовлетворяет условию. Если же это не так, то найдётся ученик y, который не занимается либо в A, либо в B. Без ограничения общности можно считать, что он не занимается в B, но тогда он должен заниматься в A (чтобы у x и y был общий кружок), и ещё в одном кружке, который мы назовём C.

Рассмотрим теперь 2 случая.

Случай 1. Есть ученик z, занимающийся в каком-то кружке D, отличном от трёх уже выбранных. Если этот ученик не занимается в A, то, так как он не может заниматься и в B и в C, у него нет общего кружка либо с x, либо с y, что невозможно. Значит z обязательно занимается в A.

Любой ученик, не занимающийся в A, не может одновременно заниматься в B, C и D. Но если он не занимается, например, в B, то он не имеет общих кружков с x. Аналогично, невозможны случаи, когда он не занимается в C или в D (ибо тогда он не имеет общих кружков с y и z соответственно).

Итак, мы доказали, что в случае 1 в A занимаются все ученики, и A можно выбрать кружком из условия.

Случай 2. Ни один из учеников не занимается в других кружках, кроме A, B и C. Пусть всего в классе n человек и в парах кружков (A, B), (B, C) и (C, A) занимается соответственно c, a и b учеников. Понятно, что тогда в кружках A, B и C занимаются соответственно $b+c$, $a+c$ и $a+b$ учеников. Если предположить, что в каждом кружке занимаются менее $\frac{2}{3}$ учеников класса, то $b+c < \frac{2}{3}n$, $a+c < \frac{2}{3}n$, $a+b < \frac{2}{3}n$. Значит $2a+2b+2c < 2n$, $a+b+c < n$, что противоречит условию $a + b + c = n$. Итак, наше предположение неверно, но значит хотя бы в одном из кружков занимаются по крайней мере $\frac{2}{3}$ учеников класса.

Комментарий. Доказано, что возможные лишь две (не исключающие друг друга) ситуации: или есть кружок, в котором занимаются все дети из класса, или есть ровно три кружка — 3 балла.

Доказано, что если кружков не более трёх, то необходимый кружок найдётся — 3 балла.

9.5. Натуральное число n имеет по крайней мере 4 различных натуральных делителя, при этом $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$, где $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ — четыре наименьших натуральных делителя числа n. Найдите все такие числа n.

Ответ. 130.

Первое решение. Если n нечётно, то все его делители нечётны, и в равенстве $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2 = n$ слева стоит сумма четырёх нечётных чисел, то есть чётное число, а справа — нечётное число n. Так как это невозможно, n обязано делится на 2, но значит $d_2 = 2$.

Заметим сразу, что если $d_1 \neq a$, $d_2 \neq a$, …, $d_{k-1} \neq a$ и $d_k \;\vdots\; a$ (или $n \;\vdots\; a$), то $d_k = a$. Действительно, a будет делителем n, и если $d_k \neq a$, то $d_k > a$, и значит a должно быть в списке среди $d_1, \ldots, d_{k-1}$, что запрещается условиями.

Так как $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 5 + d_3^2 + d_4^2$ чётно, то числа d_3 и d_4 разной чётности, то есть ровно одно обязано быть нечётным. Но значит у n есть нечётный простой делитель. Пусть $p > 2$ — наименьший из простых нечётных делителей числа n. Заметим сразу, что так как n делится на 2 и p, то $n = 2pm$, где $m \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что нечётное число из d_3 и d_4 обязано быть равно p, так как оно делится на простой нечётный делитель числа n, значит не меньше p. Но больше p оно не может быть по построению.

Случай 1. Если $d_4 = p$, то d_3 — чётно. Если оно делится на 4, то $d_3 = 4$. Если оно делится на какой-то нечётный простой делитель q числа n, то оно не меньше $2q > q \geqslant p = d_4$, что невозможно.

В этом случаем получаем уравнение $1 + 2^2 + 4^2 + p^2 = 2pm$, $21 + p^2 = 2pm$, но значит $21 = p(2m - p)$, то есть 21 делится на p. Если $p = 3$, то $d_4 < d_3$, а если $p = 7$, то $n = 1 + 4 + 16 + 49 = 70$ имеет простой нечётный делитель 5, меньший 7.

Случай 2. Пусть теперь $d_3 = p$. Тогда либо $d_4 = 4$, либо $d_4 = 2p$. Действительно, если d_4 делится на 4, то оно обязано быть равно 4. Если же не делится, то у него есть хотя бы один простой нечётный делитель, то есть оно не меньше $2p$, а значит обязано быть равно $2p$.

Если $d_4 = 4$, то, очевидно, $d_3 = 3$, и $n = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$ не делится на 4.

Если $d_4 = 2p$, то $1 + 4 + p^2 + 4p^2 = 2pm$, $5 = p(2m - 5p)$, значит 5 делится на p, то есть $p = 5$. В этом случае $n = 1 + 4 + 25 + 100 = 130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$. Понятно, что $n = 130$ нам подходит.

Второе решение. Будем использовать первые 2 абзаца из предыдущего решения.

Квадрат чётного числа делится на 4. Квадрат нечётного числа $2m+1$ имеет вид $(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 = 4(m^2+m)+1$, значит даёт остаток 1 при делении на 4. Поэтому $n = d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2 = 5+d_3^2+d_4^2$ даёт при делении на 4 либо остаток 1, либо остаток 2, либо остаток 3. Но значит n не делится на 4.

Так как $n \neq 2$ и $n \not\vdots\, 4$, то n имеет наименьший нечетный простой делитель p. Понятно, что $d_3 \geqslant p$, значит $d_3 = p$. Числа n и d_2 чётные, числа d_1 и d_3 нечётные, значит d_4 чётное число. Так как оно не равно 4, то d_4 делится на нечётное простое q. Поэтому $d_4 \geqslant 2q \geqslant 2p$, то есть $d_4 = 2p$.

Итак, $n = 1+4+p^2+4p^2 = 5+5p^2$, то есть n делится на 5. Число p не может быть равно 3 (так как тогда $d_3 = 3$, $d_4 = 6 > 5$). Значит $p = 5$, и $n = 1+4+25+100 = 130 = 2\cdot 5\cdot 13$, которое нам подходит.

Комментарий. Дан верный ответ — 1 балл.

Доказано, что n — чётное число — 1 балл.

Если в решении происходит неполный неупорядоченный перебор делителей — не более 3 баллов.