9 класс

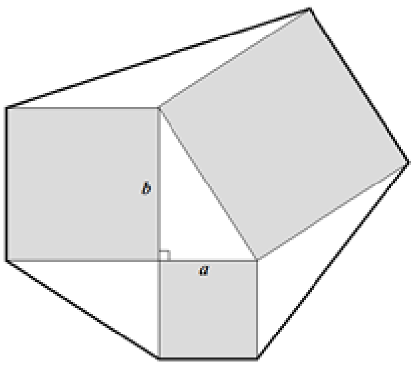
1. На одном острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. В Думе этого острова заседает 101 депутат. Было решено сократить Думу на одного депутата. Но каждый из депутатов заявил, что, если его выведут из состава Думы, то среди оставшихся депутатов большинство будут лжецами. Сколько рыцарей и сколько лжецов в Думе?

   Решение. Пусть P – количество рыцарей в Думе, Л – количество лжецов (P + Л $= 101$). Тогда в соответствии с высказыванием депутата-рыцаря $P - 1 < 50$. Следовательно, $P < 51$ (отсюда, в частности, следует, что Дума не может состоять из одних рыцарей). В соответствии с высказыванием депутата-лжеца Л - 1 $\leqslant 50$. Следовательно, Л $\leqslant 51$ (отсюда, в частности, следует, что Дума не может состоять из одних лжецов). **Ответ:** 51 лжец и 50 рыцарей.

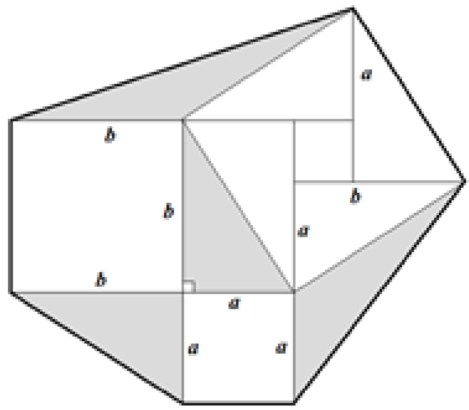
2. Известно, что сумма квадратов корней квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$ равна 2023. Найдите сумму квадратов корней $x^2 + bx + c = \frac{1}{2}$.

   Решение. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$, тогда $x_1 + x_2 = -b$, $x_1x_2 = c$. Так как $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = b^2 - 2c$, то $b^2 - 2c = 2023$. Пусть x_3, x_4 – корни квадратного уравнения $x^2 + bx + c - \frac{1}{2} = 0$, тогда $x_3^2 + x_4^2 = (x_3 + x_4)^2 - 2x_3x_4 = b^2 - 2(c - \frac{1}{2}) = b^2 - 2c + 1 = 2023 + 1 = 2024$. **Ответ:** 2024.

3. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b во внешнюю сторону построены три квадрата. Найдите площадь шестиугольника, вершинами которого являются вершины этих квадратов, не являющиеся вершинами данного треугольника.



   Решение. Очевидно, что площадь искомого шестиугольника равна сумме площадей трех квадратов и четырех треугольников. Пусть гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, тогда площади трех квадратов равны a^2, b^2 и c^2. Четыре серых треугольника - равновелики, это нетрудно показать, сделав дополнительные построения так, как показано на рисунке: у этих треугольников основания и высоты равны a и b, поэтому площадь каждого из них равна $\frac{1}{2}ab$.



В итоге получим площадь искомого шестиугольника $S = a^2 + b^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = (a+b)^2 + c^2$. Учитывая, что $c^2 = a^2 + b^2$, окончательно получим, что $S = (a+b)^2 + a^2 + b^2$. **Ответ:** $(a+b)^2 + a^2 + b^2$.

Комментарий. Равенство площадей треугольников может быть доказано с помощью формулы $\frac{1}{2}xy\sin\alpha$ и формул приведения – баллы не снимать.

4. Натуральное число n таково, что n^2+1 – десятизначное число. Верно ли, что в числе n^2+1 всегда найдутся одинаковые цифры?

   Решение. Предположим, что одинаковых цифр нет. Тогда сумма цифр этого десятизначного числа равна 45 (0+1+2+...+9), а значит, само число n^2+1 должно делиться на 3. Но квадрат натурального числа может давать остатки только 0 или 1 при делении на 3. Значит, n^2+1 даёт только остатки 1 или 2 и не может делиться на 3. Противоречие. **Ответ:** верно.

5. Ненулевые действительные числа a, b и c удовлетворяют следующим равенствам: $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$. Определите, какие значения может принимать выражение

$$\frac{a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{4c}{a+b}.$$

   Решение. Рассмотрим 2 случая:

   1) $a = b = c$,

   2) среди чисел a, b и c есть различные.

Если $a = b = c$, то $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{2b}{a+c} + \dfrac{4c}{a+b} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2} + \dfrac{4}{2} = \dfrac{7}{2}$.
Если среди чисел a, b и c есть различные, то не нарушая общности можно считать, что $a \neq b$ (случаи $a \neq c$ и $b \neq c$ рассматриваются аналогично). Из равенств $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$ получаем: $a^2 - bc = b^2 - ac \Rightarrow a^2 - b^2 = bc - ac \Rightarrow (a-b)(a+b) = -c(a-b) \Rightarrow a+b = -c \Rightarrow a+b+c = 0$.

Этот же результат получится, если $a \neq c$ или $b \neq c$. То есть, если среди a, b, c есть два различных числа, то сумма всех трёх чисел равна нулю. Получаем, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{4c}{a+b} = \frac{a}{-a} + \frac{2b}{-b} + \frac{4c}{-c} = -7.$$

Ответ: $\dfrac{7}{2}, -7$.

Комментарий. Рассмотрен только случай равенства чисел a, b и c – 3 балла. Рассмотрен только случай, когда среди чисел a, b и c есть различные – 4 балла.