9 класс

1. При каком наибольшем натуральном n число $n^3 + 2024$ делится на $n + 1$?

Ответ: 2022.

Решение. Заметим, что n^3+1 делится на $n+1$, так как $n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1)$. Отсюда следует, что выражение $n^3 + 2024 = (n^3 + 1) + 2023$ делится на $n + 1$ тогда и только тогда, когда 2023 кратно $n + 1$. Значит, наибольшее натуральное значение n равно 2022.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что число $n = 2022$ удовлетворяет условию, но не обосновано, что бо́льших значений n нет — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. Известно, что числа a, b, c отрицательные и $a < b < c$. Расставьте числа $x = (a+b)(b+c)$, $y = (b + c)(c + a)$, $z = (c + a)(a + b)$ в порядке возрастания. Укажите все возможные случаи.

Ответ: $y < x < z$.

Решение. По условию $a < b < c < 0$, и значит,

$$x - y = (b + c)(a + b - c - a) = b^2 - c^2 > 0,$$
$$z - x = (a + b)(c + a - b - c) = a^2 - b^2 > 0,$$

поэтому $y < x < z$.

Критерии. Только ответ или ответ «с объяснением» в виде числовых примеров — 0 баллов. Верно получено только одно из неравенств — 2 балла. Арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения, — снять 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

3. Коэффициенты уравнений $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ удовлетворяют условию: $p_1p_2 > 2(q_1 + q_2)$. Докажите, что хотя бы одно из уравнений имеет два различных действительных корня.

Решение. Предположим, что оба уравнения имеют *не более одного* действительного корня, и значит, дискриминанты квадратных трёхчленов неположительные, то есть $p_1^2 \leqslant 4q_1$ и $p_2^2 \leqslant 4q_2$. Тогда их сумма также неположительная: $p_1^2 + p_2^2 \leqslant 4(q_1 + q_2)$. По условию задачи правая часть этого неравенства меньше $2p_1p_2$, поэтому $p_1^2 + p_2^2 < 2p_1p_2$, то есть $(p_1 - p_2)^2 < 0$, противоречие. Значит, исходное предположение неверно, и хотя бы одно из уравнений имеет два различных действительных корня.

Критерии. Утверждение проверено для частных примеров – 0 баллов. Доказано более слабое утверждение – дискриминант одного из уравнений неотрицательный, снимается 2 балла.

4. В некотором государстве было решено построить 20 новых городов на 9 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

Ответ: 124 *парома.*

Решение. Пусть $x_1, \ldots, x_9$ — количество городов на каждом острове. Предположим, что существуют числа i и j такие, что $x_i \geqslant x_j > 1$, и рассмотрим произвольный город A на j-м острове. Число паромных сообщений из города A равно $20 - x_j$. Попробуем «перенести» город A на более заселённый i-й остров. Тогда на i-м острове будет x_i+1 городов и из города A будет выходить $20-(x_i+1)$ паромов, причём никакие другие паромные сообщения этот перенос не затронет. Но

$$20 - (x_i + 1) < 20 - x_j \quad\iff\quad x_j < x_i + 1.$$

Другими словами, при переносе города на более заселённый остров *число паромных сообщений уменьшается.* Значит, наименьшее количество паромов получится, когда на одном острове будет 12 городов, а на каждом из остальных 8 островов — по одному городу. В этом случае число паромных сообщений будет равно

$$12 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 124.$$

Критерии. Правильно указана конструкция примера, но неправильно подсчитано число паромов — 2 балла. Пример с правильным подсчётом числа паромов — 3 балла. Доказано, что число паромных сообщений уменьшается при переносе города на более заселённый остров — ещё 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность ω_2 вторично в точке M, а луч O_2A пересекает ω_1 вторично в точке N. Прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : AF$.

Ответ: $AE : AF = 1 : 1$.

Решение. (Рис. 5.) Рассмотрим равнобедренные треугольники O_1AN и O_2AM. Их углы при вершине A равны как вертикальные. Отсюда легко следует равенство всех остальных углов этих треугольников, в частности, равны углы при центрах O_1 и O_2. Так как угол MEA — внешний для треугольника EAN, то

$$\angle MEA = \angle EAN + \angle ENA.$$

Угол EAN измеряется половиной дуги NE, а угол ENA — половиной дуги EA, поэтому угол MEA равен половине центрального угла при вершине O_1. Угол MFA измеряется половиной дуги AM, и значит, равен половине центрального угла при вершине O_2. Следовательно, $\angle MEA = \angle MFA$, то есть треугольник AEF — равнобедренный, и значит, $AE = AF$.

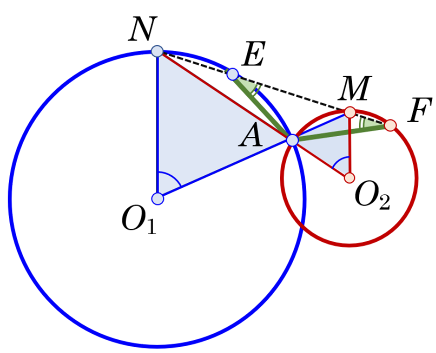

Рис. 5

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что угол MEA равен равен половине центрального угла с вершиной O_1 — 3 балла. Доказано, что угол MFA равен половине центрального угла с вершиной O_2 — 1 балл. Полное решение — 7 баллов.