Ключи к заданиям муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников 20232/24 учебного года по математике

Тула 2023

Список использованной литературы

Журналы:

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников».

Книги и методические пособия:

1. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Муниципальные олимпиады Московской области по математике. – М.: МЦНМО, 2019. – 400 с.

2. Агаханов Н. Х., Богданов И. И., Кожевников П. А., Подлипский О. К., Терешин Д. А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

3. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

4. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математика. Районные олимпиады. 6–11 классы. – М.: Просвещение, 2010.

5. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К., Рубанов И. С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

6. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К., Рубанов И. С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

7. Адельшин А. В., Кукина Е. Г., Латыпов И. А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007–2009. – М.: МЦНМО, 2011.

8. Андреева А. Н., Барабанов А. И., Чернявский И. Я. Саратовские математические олимпиады. 1950/51–1994/95 (2-е издание, исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

9. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.

10. Блинков А. Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006-2013. – М.: МЦНМО, 2014.

11. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998–2006. – М.: МЦНМО, 2014.

12. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

13. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е издание, стереотипное). – М.: МЦНМО, 2013.

14. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы (5-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2012.

15. Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2011.

16. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

17. Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

18. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное) – М., МЦНМО, 2013.

19. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 – 576 с.

20. Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс:

http://www.problems.ru/

Методические рекомендации для жюри муниципального этапа олимпиады по оцениванию работ участников

Общие критерии оценок приводятся в следующей достаточно условной таблице. К некоторым задачам имеются дополнительные комментарии к оцениванию.

Оценка	***Правильность (ошибочность) решения***
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1 – 2	Решения нет, но есть некоторые продвижения, которые являются частью решения.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). Дан ответ к задаче без обоснования, если этот ответ не подсказан условием, не является очевидным и может задать направление поиска решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует.

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Условия и решения задач

9.1. Сколько цифр в десятичной записи имеет наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 2023?

Ответ: 225.

Решение. Чтобы число было наименьшим, оно должно иметь в своей записи как можно больше цифр 9. Так как $2023 = 224 \cdot 9 + 7$, то наименьшим будет число, первой цифрой которого будет 7, а остальные 224 цифры – 9. Таким образом, это число имеет в своём составе 225 цифр.

9.2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy + zu = 14, \\ xz + yu = 11, \\ xu + yz = 10, \\ x + y + z + u = 10. \end{cases}$$

Ответ: $(1,2,3,4), (2,1,4,3), (3,4,1,2), (4,3,2,1)$.

Решение. Сложив 1 и 2 уравнения, получим $(x+u)(y+z) = 25$. Из 4-ого уравнения $(x+u)+(y+z) = 10$. Откуда $(x+u) = (y+z) = 5$. Аналогично при помощи 1-ого, 3-его и 4-ого находим $x+z = 6$, $y+u = 4$ или $x+z = 4$, $y+u = 6$; а при помощи 2-

ого, 3-его и 4-ого – $x + y = 3$ и $z + u = 7$ или $x + y = 7$ и $z + u = 3$. В итоге поучаем в ответе четвёрки $(x, y, z, u) \in \{(1,2,3,4), (2,1,4,3), (3,4,1,2), (4,3,2,1)\}$.

Комментарий. Только верный ответ – 1 балл.

9.3. Бакалавр за четыре года обучения в университете сдал 24 экзамена, причем в каждом году количество экзаменов было больше, чем в предыдущем. За четвертый год обучения он сдал экзаменов в 2 раза больше, чем на первом курсе. Сколько экзаменов сдал бакалавр на третьем году обучения?

Ответ: 7.

Решение. 1. Пусть на 1 курсе студент сдал x $(x \in N)$ экзаменов. Тогда на втором курсе не меньше, чем $x + 1$, на третьем не меньше $x + 2$, на четвертом $2x$. С другой стороны раз на 4 курсе было $2x$ экзаменов, то на третьем – не больше чем $2x - 1$, на втором – не больше чем $2x - 2$. Значит, $5x + 3 \leq 24 \leq 7x - 3$. Решая левую часть двойного неравенства, получим, что $x \leq 4\frac{1}{5}$. А решив правую часть, что $x \geq 3\frac{6}{7}$. Откуда единственным натуральным решением будет $x = 4$.

2. Вычислим теперь сколько экзаменов сдал студент за 3 год, сделав соответствующие оценки, с учетом того, что за первый год было сдано 4 экзамена. Обозначим искомое число y. Имеем: $x + 2 \leq y \leq 2x - 1$, или $6 \leq y \leq 7$. Таким образом, студент сдал 6 или 7 экзаменов. Проверим оба варианта.

А) если 6, то посчитаем количество возможных экзаменов

1 – 4; 3-6; значит 2-5; 4-8. Всего 23 экзамена что противоречит условию.

В) если 7, то:

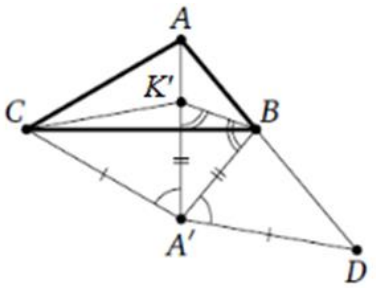
1-4; 3-7; 4-8; значит во 2 год может быть 5 экзаменов, а всего 24.

9.4. В 10Б классе 24 ученика. На выборах старосты каждый из них проголосовал за одного из своих одноклассников (за себя голосовать нельзя). Докажите, что в этом классе можно выбрать группу из восьми человек, среди членов которой никто ни за кого не голосовал.

Решение. Рассмотрим наибольшую группу A учащихся, в которой никто ни за кого не голосовал. Тогда каждый из оставшихся учеников попадает в группу B тех, за кого голосовали учащиеся из группы A, либо в группу C тех, кто голосовал за учащихся из группы A (иначе его можно было бы добавить к A, что противоречит её максимальности). Ясно, что в B школьников не больше чем в A. Но и в C школьников не больше чем в A, поскольку в ней никто ни за кого не голосовал. Следовательно, в A не меньше 8 человек.

9.5. Внутри треугольника ABC с углами $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ взята точка K так, что $\angle KBC = 20^\circ$, $\angle KCB = 10^\circ$. Докажите, что AK перпендикулярно BC.

Решение. Пусть A' – точка, симметричная A относительно прямой BC.
В равнобедренном треугольнике $A'AC$ имеем $\angle ACA' = 60^\circ$, поэтому треугольник $A'AC$ равносторонний. Отметим на отрезке AA' такую точку K' внутри треугольника ABC, что $\angle K'BC = 20^\circ$. Отметим на продолжении AB за точку B такую точку D, для которой $A'D = A'A = A'C$. Ясно, что $\angle A'BK' = 70^\circ$ и $\angle A'K'B = 70^\circ$, значит, треугольник $A'BK'$ равнобедренный, $A'B = A'K'$.



Найдем углы в равнобедренных треугольниках ABA' и ADA': $\angle ABA' = 100^\circ$, $\angle AA'B = \angle BAA' = \angle ADA' = 40^\circ$, $\angle AA'D = 100^\circ$. Поэтому $\angle BA'D = 100^\circ - 40^\circ = 60^\circ = \angle K'A'C$.
Следовательно, треугольники $A'BD$ и $A'CK'$ равны, значит, $\angle K'CB = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ$, т. е. M' совпадает с M.