9 класс

1. Найдите какое-нибудь натуральное число, которое делится на 2023, а сумма его цифр равна 2023.

   Ответ: $2023\ldots202320232023$ (число 2023 повторяется 289 раз), так как $2023 = 7 \cdot 289$.

   Критерии оценки.

   1) Верный пример — 7 баллов.

2. Можно ли представить в виде суммы квадратов выражение:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 5y + 7x + xz + 1\,?$$

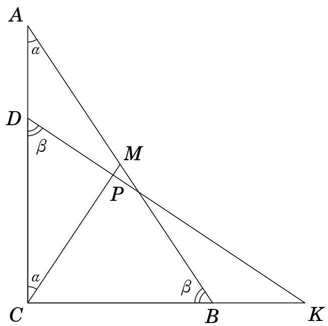
   Ответ: нельзя.

   Решение. Сумма квадратов может принимать только неотрицательные значения, а при $x = z = 0, y = 1$ это выражение отрицательное.

   Критерии оценки.

   1) Ответ без обоснования оценивается в 0 баллов.

3. Два равных прямоугольных треугольника ABC и CDK имеют общий прямой угол C. Докажите, что медиана CM треугольника ABC перпендикулярна стороне DK треугольника CDK.



Решение. Пусть P — точка пересечения стороны DK и медианы CM. Тогда треугольник CPD – прямоугольный ($\triangle CMA$ — равнобедренный, $\angle MCA = \angle MAC = \alpha$, $\angle KDC = \beta$, поскольку треугольники ABC и CDK равны, то $\alpha + \beta = 90°$).

Критерии оценки.

1) Решение задачи в частном случае (равнобедренные треугольники, конкретные углы в треугольниках) оценивается в 1 балл.

4. Можно ли разложить 225 камешков в 15 куч так, чтобы не было куч с равным количеством камешков, однако после произвольного разделения любой кучи на две меньших, это свойство нарушалось?

   Решение. Можно, например, взять 15 кучек с количеством камней в них равными $1, 3, 5, \dots, 29$. Тогда при любом делении кучки с нечётным числом камней получится две кучки, одна из которых будут также с нечётным числом камней, т. е. будет повторяться.

   Критерии оценки.

   1) Только верный пример без обоснования, что условие задачи выполнено — 3 балла.

5. Фигура «принц» может ходить на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо, или на одну клетку по диагонали влево вниз. Может ли «принц», начиная из левого верхнего угла доски 8×8 клеток, обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно по одному разу?

   Ответ: не может.

   Решение. Занумеруем строки снизу вверх и столбцы слева направо числами $0, 1, \dots, 7$. Каждой клетке поставим в соответствие сумму $x = i + j$ номеров строки и столбца, на пересечении которых эта клетка находится (см. рис. 1). «Принц» начинает свой путь из клетки с номером 0. При каждом ходе «принца» число x либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 2.

7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7

Рис. 1

1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
	1	2	0	1	2	0	1

Рис. 2

Поэтому остатки от деления числа x на 3 изменяются в следующей последовательности: $0, 1, 2, 0, 1, 2, \ldots$ Удалим с доски клетку 0. Оставшиеся 63 клетки окрасим в диагональную раскраску в три цвета: $0, 1, 2$. Нулевым цветом будут окрашены 20 клеток, первым цветом — 22 клетки, вторым цветом — 21 клетка (см. рис. 2). Предположим, что «принцу» удалось побывать в каждой клетке доски по одному разу. Тогда 63 клетки разбиваются на 21 тройку клеток, идущих по ходу «принца». Тогда в каждой тройке ровно одно число каждого цвета, то есть клеток каждого цвета должно быть ровно 21. Получили противоречие.

Критерии оценки.

1) Ответ без обоснования оценивается в 0 баллов.
2) Если приведена классификация клеток по остаткам от деления на 3, либо идея 3-цветной раскраски, но в подсчётах допущены ошибки — 3 балла.